ОБЩИЕ ТЕОРИИ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КРАТНОСТИ И ДЕЛИМОСТИ, ОТРАЖЕНИЙ БИССЕКТРИСЫ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ СТОРОНАМИ, (НЕ)ПРЕРЫВНОСТИ ЗАДАЧ, МОДЕЛИРОВАНИЯ, ФИЛОСОФИИ И ПСИХОЛОГИИ ИХ РЕШЕНИЯ И ОДНОНАПРАВЛЕННОСТИ

Ph.D. & Dr.Sc. Lev Grigorevic Gelimson

Академический институт создания всеобщих наук (Мюнхен)

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1969, 2020

ОБЩИЕ ТЕОРИИ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КРАТНОСТИ И ДЕЛИМОСТИ, ОТРАЖЕНИЙ БИССЕКТРИСЫ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ СТОРОНАМИ, (НЕ)ПРЕРЫВНОСТИ ЗАДАЧ, МОДЕЛИРОВАНИЯ, ФИЛОСОФИИ И ПСИХОЛОГИИ ИХ РЕШЕНИЯ И ОДНОНАПРАВЛЕННОСТИ

Гелимсон Лев Григорьевич,

доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии,

директор, Академический институт создания всеобщих наук, Мюнхен, Германия,

E-mail: Leohi@mail.ru Web: http://kekmir.ru/members/person_6149.html

Аннотация. Введены наибольшие общие делящие и наименьшие общие кратные меры и многомерные кубы с обобщением наибольших общих делителей и наименьших общих кратных. На основе трёхуровневого иерархического анализа создана теория конечных и бесконечных последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами. Открыты явления и доказанные теоремами законы

конечной при соизмеримости и бесконечной при несоизмеримости сторон прямоугольника биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, её конечной обратимости, неповторяемости, непротивоходности, невозвратимости и завершения в отличных от исходной вершинах прямоугольника, частичных, а при конечности биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и полных её общего числа отрезков и общей

длины вместе с единым размером и общим количеством квадратов равномерной сетки, образованной всеми самопересечениями биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. В общей теории (не)прерывности задач доказаны всюду разрывность задачи о биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и её вездесущность (повсеместность, всюду представленность, всюду наличие, всюду

частота, общепринятая «всюду плотность») в нём в случае её бесконечности. Этой задачей на метауровне математически моделируются конечность и бесконечность, разрешимость и неразрешимость, простота и сложность, лёгкость и трудность, стандартность алгоритмического рассудка и открытия изобретательного разума, философия и психология решения задачи вчувствованием, вдумыванием и вживанием в неё, а также однонаправленность.

Ключевые слова: наибольший общий делитель, наибольшая общая делящая мера, наибольший общий делящий многомерный куб, наименьшее общее кратное, наименьшая общая кратная мера, наименьший общий кратный многомерный куб, теория последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами, биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике, трёхуровневый

иерархический анализ, конечная обратимость, неповторяемость, непротивоходность, невозвратимость, завершение, основательность, продолговатость, несоизмеримость, система относительных координат, самопересечение, равномерная <u>квадратная</u> сетка, всюду разр<u>ы</u>вная задача, общая теория непрерывности задач, вездесущность, повсеместность, всюду представленность, наличие, частота,

плотность, метауровень, математическое моделирование, бесконечность, неразрешимость, простота, сложность, лёгкость, трудность, стандартность алгоритмического рассудка, открытия изобретательного разума, философия и психология решения задачи, вчувствование, вдумывание, вживание, однонаправленность.

УДК 51

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1969, 2020

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: ОБЩИЕ ТЕОРИИ <u>МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ</u> И <u>ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ</u> КРАТНОСТИ И ДЕЛИМОСТИ, ОТРАЖЕНИЙ <u>БИССЕКТРИСЫ</u> В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ СТОРОНАМИ, (НЕ)ПРЕРЫВНОСТИ ЗАДАЧ, МОДЕЛИРОВАНИЯ, <u>ФИЛОСОФИИ И ПСИХОЛОГИИ ИХ РЕШЕНИЯ И ОДНОНАПРАВЛЕННОСТИ 10/367</u>

THE GENERAL THEORIES OF <u>METROLOGICAL</u> AND <u>GEOMETRIC</u> MULTIPLICITY AND DIVISIBILITY, OF RECTANGLE <u>BISECTOR</u> REFLECTIONS BY RECTANGLE SIDES, OF PROBLEM (DIS)CONTINUITY, OF THE MODELING, PHILOSOPHY AND PSYCHOLOGY OF SOLVING <u>PROBLEMS</u> AND OF THE ONE-DIRECTIONALITY

Gelimson Lev Grigorevic,

Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering

in the section “Physical and Mathematical Sciences”

by the Highest Attestation Commission Classifier,

Director, Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany,

E-mail: Leohi@mail.ru Web: http://kekmir.ru/members/person_6149.html

Abstract. The greatest common dividing and the least common multiple measures and multidimensional cubes with the generalization of the greatest common divisors and the least common multiples have been introduced. On the basis of a three-level hierarchical analysis, the theory of finite and infinite successive reflections of the inner corner bisector of a rectangle by its sides has been created. Among the phenomena and laws proved by the theorems are the

finiteness or the infinity of the bisectral broken line of reflections in a rectangle with the commensurability or incommensurability of the rectangle sides, respectively, finite reversibility, non-repeatability, non-counter-movement, non-return and termination phenomena and laws, the partial segments number and the partial length of the bisectral broken line of reflections in a rectangle and, when this line is finite, its total number of segments and total length together

with the common size and the total number of the squares of the uniform square grid formed by all self-intersections of the bisectral broken line of reflections in a rectangle. In the general theory of problems (dis)continuity, the discontinuity everywhere of the problem on a bisectral broken line of reflections in a rectangle and the ubiquity (omnipresence; representation, presence, frequency, generally accepted “density” everywhere) of this line in a rectangle has been

proved in the case of this line infinity. At the metalevel, this problem mathematically models finiteness and infinity, (in)solvability and (un)decidability, simplicity and complexity, ease and difficulty, algorithmic reasoning standardization and inventive mind discoveries, solving problem philosophy and psychology by introfeeling, introthinking and introliving into a problem, as well as the one-directionality.

Keywords: greatest common divisor, greatest common dividing measure, greatest common dividing multidimensional cube, least common multiple measure, least common multiple multidimensional cube, theory of finite and infinite successive reflections of the bisector of an internal angle of a rectangle by its sides, bisectral broken line of reflections in a rectangle,

three-level hierarchical analysis, finite reversibility, non-repeatability, non-counter-movement, non-return, termination, infinity, everywhere discontinuous problem, solidity, elongation, incommensurability, system of relative coordinates, self-intersection, uniform square grid, general theory of problems discontinuity, ubiquity, omnipresence, representation, frequency,

density everywhere, metalevel, mathematically modeling, finiteness, insolvability, undecidability, simplicity, complexity, ease, difficulty, algorithmic reasoning standardization, inventive mind discoveries, solving problem philosophy and psychology, introfeeling, introthinking, introliving, one-directionality. UDC 51

Publishing House of the All-World Academy of Sciences “Collegium”, Munich, 1969, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

2.2. Частные случаи биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. Частные теоремы

2.3. Построение теории конечных и бесконечных последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами

3. Общая теория (не)прерывности задач и её приложение к последовательным отражениям

ПРЕДИСЛОВИЕ

Это пятая собственная научная работа, полностью самостоятельно задуманная, подготовленная, завершённая и осуществлённая под названием «Теория конечных и бесконечных последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами» первоначально в 17-летнем возрасте в 1969 году выигрыша областных олимпиад по всем

предметам и третьих мест на Всеукраинской и Всесоюзной олимпиадах по математике и окончания физико-математического специального класса будущих гимназии и лицея с золотой медалью, одной из двух в областном центре, перед началом учёбы в институте.

Второе издание настоящей научной монографии последовало через 51 год после первого издания.

ВВЕДЕНИЕ

Основное содержание настоящей научной монографии посвящено созданию, развитию и изложению теории последовательных отражений биссектрисы угла прямоугольника его сторонами и предваряется общей теорией метрологических и геометрических кратности и делимости как необходимыми, целесообразными и полезными обобщениями общематематического и даже общенаучного значения.

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КРАТНОСТИ И ДЕЛИМОСТИ

В классической математике хорошо известны и широко и чрезвычайно плодотворно применяются, особенно в теории чисел, понятия кратности и делимости с её признаками, наибольших общих делителей и наименьших общих кратных, вычисляемых по алгоритму Евклида для положительных целых чисел, арифметические для положительных целых чисел со времён античности, позже алгебраические применительно к целым числам и вообще кольцам.

Аристотелю до Евклида было известно понятие находимой по алгоритму Евклида для отрезков наибольшей общей меры отрезков как наибольшего отрезка, которому кратны эти отрезки.

Общая теория метрологических (применительно к любым однородным значениям величин) и геометрических кратности и делимости вводит и развивает систему соответствующих понятий, в том числе с известными объёмами понятий в теории и практике периодических строений и изображений, разрезания фигур и тел на одинаковые части и составления (сложения, складывания) фигур и тел из одинаковых частей.

Определение. Один геометрический предмет, в частности отрезок, фигура или тело, называется кратным другому, называемому делящим тот геометрический предмет геометрическому предмету, если и только если может быть непременно целиком составлен из конгруэнтных этому другому геометрическому предмету и поэтому также между собой частей с возможным частичным прикладыванием их граничных и без наложений их именно внутренних точек.

Для конечных множеств однородных значений наибольшие общие (делящие, что является необходимым уточнением названия) меры и вводимые наименьшие общие кратные меры и многомерные кубы, мерности которых равны мощностям этих множеств, в частности квадраты для мощности два, обобщают наибольшие общие делители и наименьшие (положительные, что является необходимым уточнением названия) общие кратные конечных множеств целых чисел.

Полезны обобщения понятий наибольших общих делителей и наименьших общих кратных применительно к произвольным попарно соизмеримым значениям величин, необходимо имеющим одну и ту же любую физическую единицу (размерность), то есть однородным. Соизмеримыми называются такие значения величин, отношения которых выражаются рациональными числами, то есть обыкновенными дробями, которые всегда можно равносильно заменить несократимыми по алгоритму Евклида или с помощью разложения числителя и знаменателя на простые множители.

Замечание. Наличие или отсутствие отрицательных знаков при умножении или делении влияет только на знаки произведения или частного соответственно и может быть рассмотрено отдельно применительно к итогам, тем более что не влияет на делимость именно нацело.

Определение. Наибольшей общей делящей мерой множества попарно соизмеримых значений называется наибольшее значение, нацело делящее все эти значения.

Нуль соизмерим с произвольным ненулевым значением, поскольку отношение нуля к этому значению является нулевым, то есть рациональным числом. Нули делить друг на друга нельзя, поэтому для них необходимо и достаточно естественным образом расширить понятие соизмеримости требованием существования хотя бы одного такого ненулевого общего значения, с которым соизмеримы рассматриваемые значения, то есть воспользоваться свойством переносности (транзитивности) отношения соизмеримости.

Разумеется, если хотя бы одно такое ненулевое общее значение существует, то существует и бесконечное множество таких значений, получающихся умножением такого значения на произвольные ненулевые рациональные числа. При таком естественном расширении понятия соизмеримости нули соизмеримы между собой как произведения любого общего значения на нуль как на рациональное число.

В итоге для полного решения вопросов соизмеримости и несоизмеримости достаточно ограничиться только положительными значениями величин.

Разумеется, любое значение соизмеримо с самим собой, или равные между собой значения соизмеримы как равные произведениям их общего значения на единицу как рациональное число. Поэтому представляет интерес решение вопросов соизмеримости или несоизмеримости только различных значений.

Рассмотрим два произвольных неотрицательных значения a и b, которые могут быть и равными между собой, и нулевыми, в том числе одновременно.

Если оба этих значения a и b равны нулю, то любое ненулевое значение является общей делящей мерой этих значений a и b, так что именно наибольшей общей делящей меры нет, а единственной общей кратной мерой нулей является только нуль, так что именно наименьшей положительной общей кратной меры нет.

Если одно из этих значений a и b равно нулю, а другое положительно, то именно ему равна наибольшая общая делящая мера, а единственной общей кратной мерой является только нуль, так что именно наименьшей положительной общей кратной меры нет.

В итоге для полного решения вопросов наибольшей общей делящей меры и наименьшей положительной общей кратной меры достаточно ограничиться только положительными значениями a и b величин.

Если существует общая делящая мера положительных значений a и b, то эти значения равны произведениям этой общей делящей меры на положительные целые числа и поэтому имеют непременно рациональное отношение, то есть соизмеримы между собой.

Если существует общая кратная мера положительных значений a и b, то эти значения равны частным от деления этой общей кратной меры на положительные целые числа и поэтому имеют непременно рациональное отношение, то есть соизмеримы между собой.

Теорема. Если отношение m/n соизмеримых значений a и b выражено несократимой дробью r/s, где m, n, r, s являются положительными целыми числами, причём r и s взаимно просты, то наибольшей общей делящей мерой значений a и b является общее значение D{a, b} двух равных отношений

$$D\{a, b\} = a/r = b/s,$$

а наименьшей положительной общей кратной мерой значений a и b является значение

$$M\{a, b\} = rsD\{a, b\} = sa = rb.$$

Доказательство.

Полезны три предварительных разъясняющих замечания.

Во-первых, по определению соизмеримости положительные значения a и b соизмеримы между собой тогда и только тогда, когда имеют непременно рациональное отношение a/b, то есть

$$a/b = m/n,$$

где m и n являются положительными целыми числами, однако необязательно взаимно простыми, так что дробь m/n может быть сократимой.

Во-вторых, если дробь m/n сократима, то по алгоритму Евклида или с помощью разложений числителя m и знаменателя n в произведения простых множителей по основной теореме арифметики приводится к равной несократимой дроби r/s делением и числителя m, и знаменателя n на их наибольший общий делитель (m, n), где r и s являются взаимно простыми положительными целыми числами, так что

$$a/b = m/n = r/s.$$

В-третьих, действительно, $a/r = b/s$ ввиду $a/b = r/s$.

Докажем, что общее значение $D\{a, b\}$ двух равных отношений

$$D\{a, b\} = a/r = b/s$$

является наибольшей общей делящей мерой значений a и b.

Во-первых, $D\{a, b\}$ является одной из общих делящих мер значений a и b по общему определению делящих мер, поскольку

$$a/D\{a, b\} = r,$$
$$b/D\{a, b\} = s$$

с положительными целыми числами r и s.

Во-вторых, пусть значение d является произвольной положительной общей делящей мерой значений a и b. Тогда по общему определению делящих мер

$$a/d = g,$$
$$b/d = h$$

с положительными целыми числами g и h. Так что

$$g/h = a/b = m/n = r/s.$$

Разложения положительных целых числителя m и знаменателя n дроби m/n в произведения простых сомножителей по основной теореме арифметики непременно существуют и единственны.

Как следствие приведение этой дроби m/n к именно несократимой дроби r/s с положительными целыми числителем r и знаменателем s непременно существует и единственно.

Поэтому для положительных целых числителя g и знаменателя h любой дроби g/h, которая равна дроби m/n, непременно существует и единственно такое положительное целое число k, что имеет место совокупность двух равенств

$$g = kr,$$

$$h = ks.$$

Тогда

$$a/d = g = kr,$$
$$b/d = h = ks.$$

Так что

$$a/r = kd,$$
$$b/s = kd$$

и ввиду

$$D\{a, b\} = a/r = b/s$$

получаем

$$D\{a, b\}/d = (a/r)/d = (b/s)/d = kd/d = kd/d = k.$$

То есть общая делящая мера D{a, b} значений a и b кратна любой общей делящей мере d значений a и b и является именно наибольшей общей делящей мерой значений a и b по её общему определению, что и требовалось доказать первой частью теоремы о том, что наибольшей общей делящей мерой значений a и b является общее значение D{a, b} двух равных отношений

$$D\{a, b\} = a/r = b/s.$$

Остаётся доказать второую часть теоремы о том, что наименьшей положительной общей кратной мерой значений a и b является значение

$$M\{a, b\} = rsD\{a, b\} = sa = rb.$$

Во-первых, сами эти равенства показывают, что значение M{a, b} является положительной общей кратной мерой значений a и b по её общему определению, коль скоро r и s являются положительными целыми числами.

Во-вторых, пусть μ является любой положительной общей кратной мерой значений a и b.

Тогда по общему определению положительной общей кратной меры значений a и b существуют такие положительные целые числа v и w, что

$$\mu = wa = vb.$$

Так что

$$v/w = a/b = m/n = r/s.$$

Разложения положительных целых числителя m и знаменателя n дроби m/n в произведения простых сомножителей по основной теореме арифметики непременно существуют и единственны.

Как следствие приведение этой дроби m/n к именно несократимой дроби r/s с положительными целыми числителем r и знаменателем s непременно существует и единственно.

Поэтому для положительных целых числителя v и знаменателя w любой дроби v/w, которая равна дроби m/n, непременно существует и единственно такое положительное целое число K, что имеет место совокупность двух равенств

$$v = Kr,$$
$$w = Ks.$$

Тогда ввиду

$$\mu = wa = vb,$$

$$M\{a, b\} = rsD\{a, b\} = sa = rb$$

получаем

$$\mu = Ksa = Krb = KM\{a, b\}$$

с положительным целым числом K.

То есть положительная общая кратная мера M{a, b} значений a и b является делящей для любой положительной общей кратной меры μ

значений a и b и является именно наименьшей положительной общей кратной мерой значений a и b по её общему определению, что и требовалось доказать второй частью теоремы о том, что наименьшей положительной общей кратной мерой значений a и b является значение

$$M\{a, b\} = rsD\{a, b\} = sa = rb.$$

Тем самым теорема доказана полностью.

Геометрические изображения наибольшей общей делящей меры D{a, b}, наименьшей положительной общей кратной меры M{a, b} и соответствующих им многомерных кубов, мерности которых равны мощностям множеств значений, в частности квадратов для множества из двух соизмеримых значений a и b мощностью два, в размерных с физической единицей значений a и b и в безразмерных относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b}) координатах показаны на рисунках 1 и 2 соответственно.

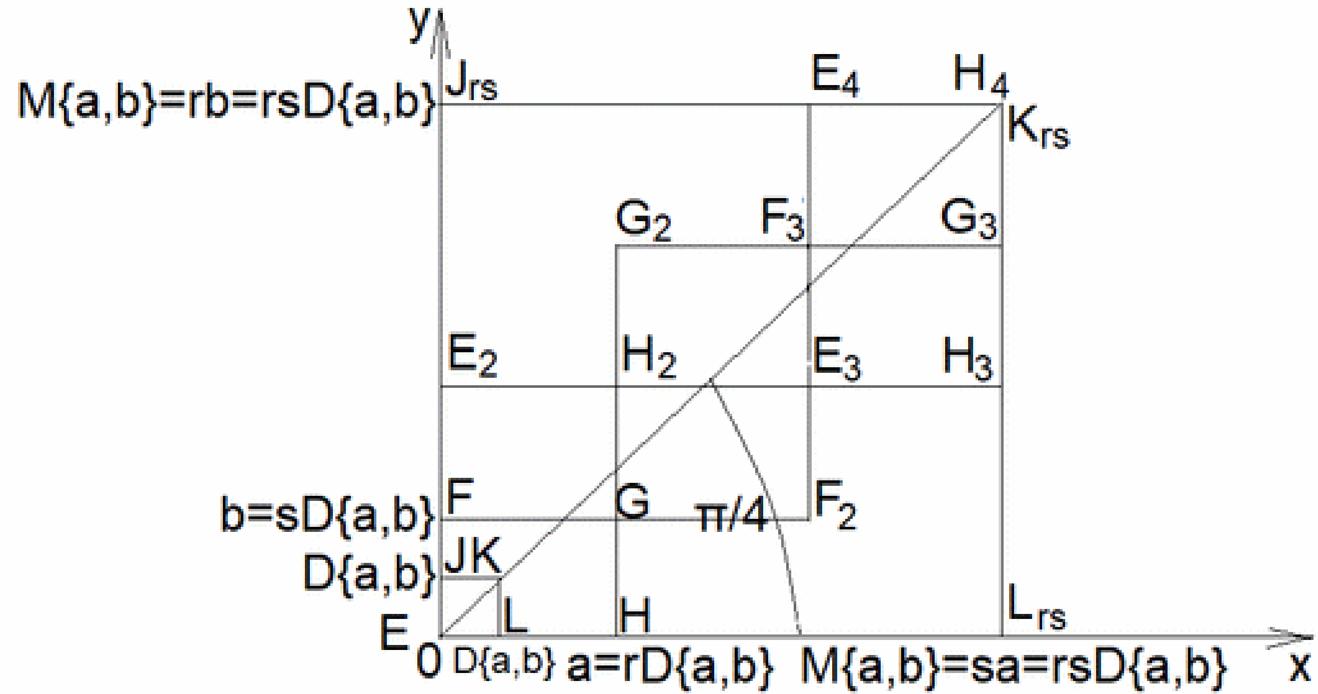

Рисунок 1. Наибольшая общая делящая мера D{a, b}, наименьшая положительная общая кратная мера M{a, b} и соответствующие им многомерные кубы, мерности которых равны мощностям множеств значений, в частности квадраты для множества из двух соизмеримых значений a и b мощностью два, в размерных с физической единицей значений a и b координатах.

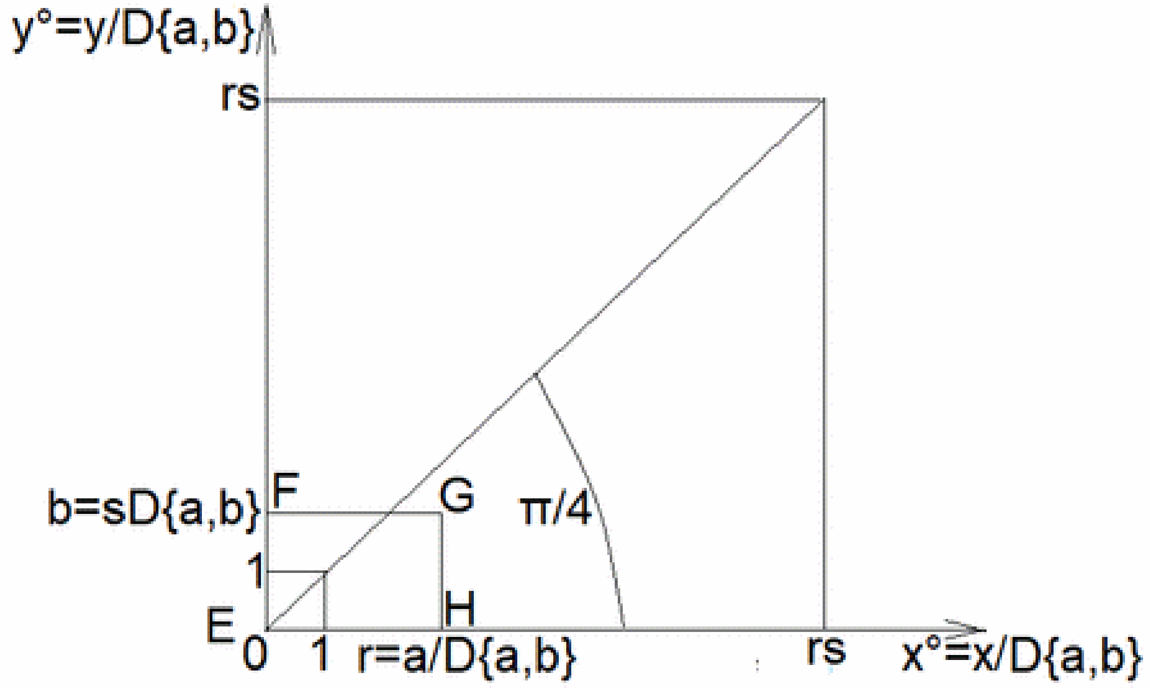

Рисунок 2. Наибольшая общая делящая мера D{a, b}, наименьшая положительная общая кратная мера M{a, b} и соответствующие им многомерные кубы, мерности которых равны мощностям множеств значений, в частности квадраты для множества из двух соизмеримых значений a и b мощностью два, в безразмерных относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b}) координатах.

На рисунке 1 изображены наименьший общий кратный квадрат $EJ_{rs}K_{rs}L_{rs}$ стороной $EJ_{rs} = EL_{rs} = M\{a, b\}$, в нём прямоугольник EFGH сторонами $EH = a$, $EF = b$, причём $a \geq b$, в нём наибольший общий делящий квадрат EJKL стороной $EJ = EL = D\{a, b\}$. Совпадающие биссектриса и диагональ EK_{rs} наименьшего общего кратного квадрата $EJ_{rs}K_{rs}L_{rs}$ изображают действительный в пределах прямоугольника EFGH и равновеликий предварительно кратко представленному здесь действительному мнимый спрямлённый ход отражений биссектрисы EK внутреннего угла FEH прямоугольника EFGH в прямоугольнике его сторонами.

Биссектриса EK в прямоугольнике EFGH начинается совпадающими биссектрисой и диагональю EK наибольшего общего делящего квадрата EJKL, продолжается до встречи с ближайшей стороной прямоугольника EFGH, которой оказывается его верхнее основание FG, поскольку a $\geq$ b, и далее, оставаясь внутри прямоугольника EFGH, последовательно отражается от его сторон по закону равенства угла падения и угла отражения, то есть по закону зеркального отражения светового луча и по закону упругого отражения, либо до первого попадания в одну из

вершин прямоугольника EFGH, в которой завершается целиком биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике его сторонами и в этом и только в этом случае оказывается конечной, что предполагается на рисунках 1 и 2, либо продолжается бесконечно без попаданий в вершины прямоугольника EFGH.

На рисунке 1 прямоугольник EFGH последовательно зеркально отражается относительно отражающей стороны при каждом отражении биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике его сторонами, что подробно представлено в дальнейшем.

Если a = b, то прямоугольник EFGH становится квадратом, биссектриса EK внутреннего угла которого немедленно попадает в противоположную вершину квадрата и на этом завершается, до её отражений сторонами дело не доходит, название биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике сохраняется чисто формально для единообразия, поскольку она ещё и целиком сводится к прямолинейной диагонали квадрата, которая является и биссектрисой.

Если a > b, то биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике не завершается сразу же целиком, а отражается от верхнего основания FG прямоугольника EFGH, который поэтому зеркально отражается относительно именно этого основания и переходит в прямоугольник FE_2H_2G, в котором ввиду равенства угла падения и угла отражения в прямоугольнике EFGH мнимый ход биссектрисы EK оказывается её прямолинейным продолжением.

В частном примере при r = 4, s = 3 на рисунке 1 мнимое продолжение биссектрисы EK в прямоугольнике FE_2H_2G первой встречает правую боковую сторону GH_2, который поэтому зеркально отражается относительно именно этой боковой стороны и переходит в прямоугольник $GH_2E_3F_2$, в котором ввиду равенства угла падения и угла отражения в прямоугольнике FE_2H_2G мнимый ход биссектрисы EK оказывается её прямолинейным продолжением.

Мнимое продолжение биссектрисы EK в прямоугольнике $GH_2E_3F_2$ первым встречает верхнее основание H_2E_3, который поэтому зеркально отражается относительно именно этого верхнего основания и переходит в прямоугольник $H_2G_2F_3E_3$, в котором ввиду равенства угла падения и угла отражения в прямоугольнике $GH_2E_3F_2$ мнимый ход биссектрисы EK оказывается её прямолинейным продолжением.

Мнимое продолжение биссектрисы EK в прямоугольнике $H_2G_2F_3E_3$ первой встречает правую боковую сторону E_3F_3, который поэтому зеркально отражается относительно именно этой боковой стороны и переходит в прямоугольник $E_3F_3G_3H_3$, в котором ввиду равенства угла падения и угла отражения в прямоугольнике $H_2G_2F_3E_3$ мнимый ход биссектрисы EK оказывается её прямолинейным продолжением.

Мнимое продолжение биссектрисы EK в прямоугольнике $E_3F_3G_3H_3$ первым встречает верхнее основание F_3G_3, который поэтому зеркально отражается относительно именно этого верхнего основания и переходит в прямоугольник $F_3E_4H_4G_3$, в котором ввиду равенства угла падения и угла отражения в прямоугольнике $E_3F_3G_3H_3$ мнимый ход

биссектрисы EK оказывается её прямолинейным продолжением и в том же частном примере при r = 4, s = 3 на рисунке 1 завершается целиком в вершине H_4, совпадающей с вершиной K_{rs} наименьшего общего кратного квадрата $EJ_{rs}K_{rs}L_{rs}$, в которой при соизмеримости a и b всегда завершается по его диагонали и биссектрисе EK_{rs} мнимое продолжение биссектрисы EK.

Следовательно, при соизмеримости сторон прямоугольника a и b, отношение которых a/b выражается именно несократимой дробью r/s, длина биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике равна диагонали наименьшего общего кратного квадрата $EJ_{rs}K_{rs}L_{rs}$ и поэтому составляет (что куда менее наглядно и куда более обстоятельно будет показано и в дальнейшем)

$$2^{1/2}M\{a, b\} = 2^{1/2}sa = 2^{1/2}rb = 2^{1/2}rsD\{a, b\}.$$

2. ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ БИССЕКТРИСЫ ВНУТРЕННЕГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНИКА ЕГО СТОРОНАМИ

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИТОГИ

Пусть из вершины прямоугольника со сторонами a и b (a $\geq$ b) исходит как биссектриса угла ломаная, строящаяся по закону упругого соударения в механике и по закону падения и отражения светового луча в оптике (угол падения равен углу отражения) от сторон прямоугольника внутрь его.

Исходящий луч включает первый отрезок биссектральной ломаной, является биссектрисой исходного внутреннего угла прямоугольника и образует с не меньшей стороной a прямоугольника угол $\alpha = \pi/4$.

Условимся завершать биссектральную ломаную именно целиком при первом же её попадании в одну из вершин прямоугольника и в таком и только в таком случае считать биссектральную ломаную конечной.

Назовём продолговатостью прямоугольника отношение его не меньшей стороны к его не большей стороне

$$\sigma = a/b.$$

Тогда для так определяемой биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике верна следующая общая теорема.

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА

Биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике не может попасть в ту же самую вершину прямоугольника, откуда эта ломаная вышла.

Биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике конечна тогда и только тогда, когда продолговатость прямоугольника рациональна, то есть его стороны соизмеримы:

$$\sigma = a/b = r/s,$$

где r, s – натуральные (положительные целые) взаимно простые числа, то есть с единичным наибольшим общим делителем:

$$r, s \in N = \{1, 2, 3, ...\}; (r, s) = 1.$$

В этом случае общее число N_g отрезков биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике равно

$$N_g = r + s - 1.$$

В этом случае введём обозначение наибольшей общей делящей меры сторон прямоугольника

$$D\{a, b\} = a/r = b/s.$$

В этом случае общая (суммарная) длина биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике составляет

$$L_g = 2^{1/2}ab/D\{a, b\} = 2^{1/2}rsD\{a, b\}.$$

Всеми самопересечениями биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике образуется равномерная квадратная решётка из

$$Q_g = (a/D\{a, b\} - 1)(b/D\{a, b\} - 1)/2 = (r - 1)(s - 1)/2$$

равных между собой квадратов со стороной

$$2^{1/2}D\{a, b\}.$$

2.2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ БИССЕКТРАЛЬНОЙ ЛОМАНОЙ ОТРАЖЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ. ЧАСТНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Если при некоторой единице длины стороны прямоугольника a и b выражаются натуральными (положительными целыми) числами при опускании как единицы длины наибольшей общей делящей меры

$$D\{a, b\} = (a, b),$$

обобщающей их наибольший общий делитель,

то продолговатость прямоугольника рациональна, условие общей теоремы выполнено, биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике конечна, общее число её отрезков составляет

$$N_g = (a + b)/(a, b) - 1,$$

общая длина биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике составляет

$$L_g = 2^{1/2}ab/(a, b),$$

а при всех самопересечениях биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике образуется равномерная квадратная решётка из

$$Q_g = [(a/(a, b) - 1][b/(a, b) - 1]/2 = (r - 1)(s - 1)/2$$

равных между собой квадратов со стороной $2^{1/2}(a, b)$.

Если дополнительно стороны a и b прямоугольника выражаются взаимно простыми натуральными числами:

$$(a, b) = 1,$$

то общее число отрезков биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике равно

$$N_g = a + b - 1,$$

общая длина биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике составляет

$$L_g = 2^{1/2}ab,$$

а при всех самопересечениях биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике образуется равномерная квадратная решётка из

$$Q_g = (a - 1)(b - 1)/2$$

равных между собой квадратов со стороной

$$2^{1/2}.$$

2.3. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ БИССЕКТРИСЫ ВНУТРЕННЕГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНИКА ЕГО СТОРОНАМИ

Открытые явление и закон и доказывающая их теорема конечной обратимости биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. Непременно конечная биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике обратима.

Доказательство.

Поскольку эта биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике конечна, то состоит из именно конечного множества отрезков.

Траектория биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике обратима ввиду взаимной однозначности и взаимной обратимости падения и отражения.

Теорема доказана.

Открытые явление и закон и доказывающая их теорема невозвратимости биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. Невозможно возвращение биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике в ту его вершину, из которой эта биссектральная ломаная вышла.

Доказательство методом от противоречащего.

Допустим, напротив, что существуют такие прямоугольник и биссектральная ломаная

отражений в нём, которая попала в ту же самую вершину прямоугольника, откуда эта биссектральная ломаная вышла.

Хотя бы один из углов, образуемых каждым из отрезков биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике с каждой из сторон прямоугольника, составляет $\pi/4$.

Поэтому такая биссектральная ломаная вынуждена вернуться в свою исходную вершину прямоугольника непременно по той же самой биссектрисе того же самого внутреннего угла прямоугольника при этой вершине прямоугольника, то есть по своей собственной траектории. Траектория этой биссектральной ломаной обратима ввиду взаимной однозначности и взаимной обратимости движения по законам падения и отражения.

Поскольку эта биссектральная ломаная попала в одну из вершин прямоугольника, то эта ломаная конечна, то есть состоит из именно конечного множества отрезков. Начиная с этой совпадающей части траектории этой биссектральной ломаной в её начале и в конце, по этой биссектральной ломаной можно двинуться от совпадающих начала и конца биссектральной ломаной к середине этой ломаной.

Раздвоение траектории этой биссектральной ломаной невозможно ввиду взаимной однозначности и взаимной обратимости движения по законам падения и отражения. Следовательно, через конечное число шагов эта биссектральная ломаная вынуждена отразиться одной из сторон прямоугольника сама в себя.

Однако для этого необходима и достаточна именно перпендикулярность падающего и отражённого отрезков этой биссектральной ломаной к соответствующей стороне прямоугольника в такой точке самоотражения этой ломаной.

Но это невозможно, поскольку хотя бы один из углов, образуемых каждым из отрезков этой биссектральной ломаной с каждой из сторон прямоугольника, составляет $\pi/4$.

Полученное противоречие доказывает эту теорему.

Открытые явление и закон и доказывающая их теорема неповторяемости биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. Для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике невозможно повторное прохождение ни единого своего отрезка в одном и том же направлении.

Доказательство методом от противоречащего.

В противоречии с теоремой допускаем существование таких прямоугольника, биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и её отрезка, проходимого ею хотя бы дважды в одном и том же направлении. Тогда

биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике, начиная с начала первого прохождения этого отрезка, образует цикл до начала второго прохождения этого же отрезка. Далее этот цикл повторяется бесконечно. Сойти с этого цикла биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике не может ввиду взаимных однозначности и обратимости своего движения по законам падения и отражения. Следовательно, эта биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике непременно бесконечна и никогда не попадёт ни в одну из вершин прямоугольника.

А теперь начнём с начала второго прохождения этого же отрезка движение по биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике в противоположном её направлении. Ввиду взаимных однозначности и обратимости её движения по законам падения и отражения произойдёт её возврат к началу того же самого первого цикла, но теперь уже проходимого в направлении, противоположном первоначальному. И вновь

этот цикл теперь уже в противоположном направлении будет проходиться биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике именно бесконечно. Избежать такого бесконечного прохождения этого цикла биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике не может ввиду её движения по взаимно однозначным и обратимым законам падения и отражения, что исключает возможность любого раздвоения её

траектории. Поэтому такая якобы биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике не могла выйти как биссектриса соответствующего внутреннего угла из своей исходной вершины прямоугольника и вообще является отнюдь не именно биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, а циклической ломаной отражений в прямоугольнике.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Открытые явление и закон и доказывающая их теорема непротивоходности биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. Для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике невозможно повторное прохождение ни единого своего отрезка в противоположных направлениях.

Доказательство методом от противоречащего.

В противоречии с теоремой допускаем существование таких прямоугольника, биссектральной ломаной отражений в

прямоугольнике и её отрезка, проходимого ею хотя бы дважды в противоположных направлениях. Тогда биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике, начиная с начала второго прохождения этого отрезка в направлении, противоположном направлению первого прохождения этого отрезка, непременно возвращается именно по своей собственной траектории теперь уже в противоположном направлении к своему началу в своей исходной вершине прямоугольника, из которой она вышла

как биссектриса соответствующего внутреннего угла. Сойти с этого пути биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике не может ввиду взаимных однозначности и обратимости своего движения по законам падения и отражения. Следовательно, эта биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике непременно конечна и вернулась к своему началу.

Однако это противоречит теореме о невозвратимости биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике.

Полученное противоречие доказывает теорему.

При необходимости путём поворотов, включая пространственные, а если ограничиваться плоскостью, то и с использованием зеркальной симметрии располагаем рассматриваемый прямоугольник на рассматриваемой плоскости следующим образом:

1. Не меньшая сторона a прямоугольника, называемая его основанием (длиной), горизонтальна. Тогда не большая сторона b прямоугольника, называемая его высотой (шириной), вертикальна.

2. Биссектральная ломаная исходит из левого нижнего угла прямоугольника как биссектриса этого внутреннего угла.

Введём обозначения согласно рисунку 3.

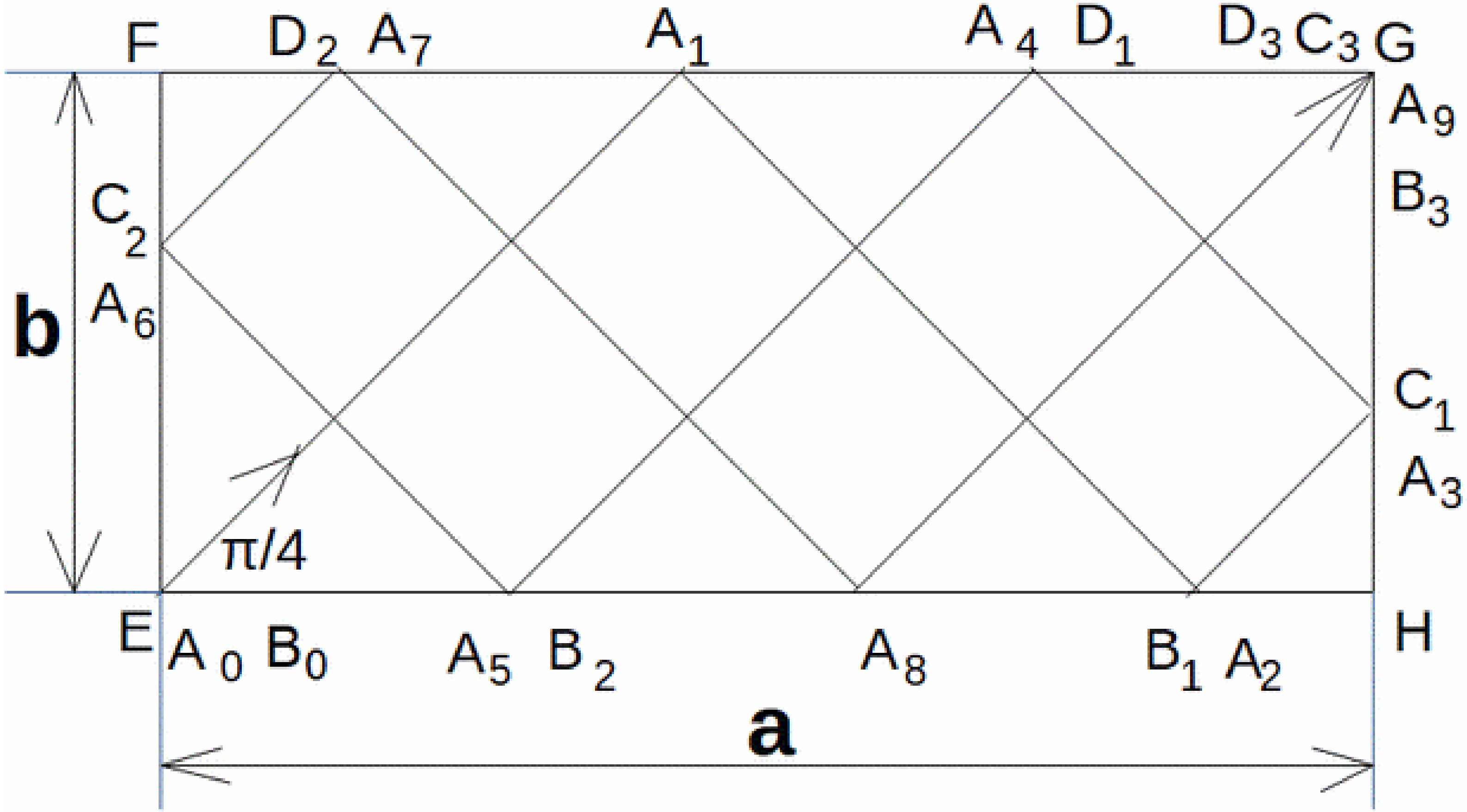

Рисунок 3. Биссектральная ломаная $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ отражений в прямоугольнике EFGH.

Прямоугольник EFGH имеет длину (основание) a и ширину (высоту) b, причём a больше или равно b. Биссектральная ломаная

$$A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$$

отражений в прямоугольнике началась в углу E прямоугольника EFGH, в данном случае оказалась конечной, состоящей из 9 отрезков, номера которых совпадают с индексами концов отрезков, и завершилась именно целиком в противоположном углу G прямоугольника EFGH.

Для совместных единообразий обозначений прямоугольника, биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, взятой в целом, а также её частей и отдельных элементов необходимы и достаточны именно кратные обозначения некоторых точек прямоугольника. Примеры:

$$\mathbf{E = A_0,}$$

$$\mathbf{G = A_9.}$$

Первым научным методом является анализ. Более того, введём именно иерархический анализ, то есть многоуровневые соподчинённые разложение и рассмотрение. Применительно к биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике естествен и целесообразен именно трёхуровневый иерархический анализ:

1. Сверхуровень целого: конечная или бесконечная биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике, взятая именно целиком, в целом.

2. Уровень частного: частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике.

3. Подуровень единичного: отдельных отрезков (звеньев, элементов) биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике.

Сверхуровень целого всегда и подуровень единичного в данном случае определяются естественно и однозначно. Естественна и однозначна также сама идея разбиения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике на части, однако в данном случае допускает две модификации, слегка различающиеся по мере удобства их использования.

Модификация 1.

Разобьём биссектральную ломаную отражений в прямоугольнике на части, каждая из которых включает однонаправленное (попеременно вправо для частей с нечётными номерами и влево для частей с чётными номерами) именно поступательное движение горизонтальной проекции текущей точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и при этом непременно завершается на одной из двух вертикальных сторон прямоугольника.

Например, по модификации 1 применительно к изображённому на рисунке 3 случаю биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике первой частью является

$$A_0A_1A_2A_3,$$

второй частью является

$$A_3A_4A_5A_6,$$

а третьей частью является

$$A_6A_7A_8A_9.$$

Модификация 2.

Предварительно разобьём биссектральную ломаную отражений в прямоугольнике на части по модификации 1. Затем из каждой части биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, если эта часть не завершается попаданием в одну из вершин прямоугольника и поэтому не является завершающей, последней в биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике,

изымается именно последний отрезок и добавляется к теперь начинающейся с него следующей части биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. Тогда каждая из частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике непременно завершается на одной из двух теперь уже горизонтальных сторон прямоугольника (его оснований).

Например, по модификации 2 применительно к изображённому на рисунке 3 случаю биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике первой частью является

$$A_0A_1A_2,$$

второй частью является

$$A_2A_3A_4A_5,$$

а третьей частью является

$$A_5A_6A_7A_8A_9.$$

Далее обе модификации рассматриваются то последовательно, то параллельно.

Модификация 2 построена на основе модификации 1 и в этом смысле вторична, однако завершает каждую часть биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике (кроме последней её части, одинаково для обеих модификаций завершающей эту биссектральную ломаную именно целиком) ровно на один отрезок раньше.

Поэтому итоги модификации 2 обычно рассматриваются прежде итогов модификации 1.

При различии итогов обеих модификаций соответствующее модификации 1 или модификации 2 обозначение каждого такого итога снабжается номером модификации в круглых скобках в левом нижнем указателе (индексе) обозначения.

Начинаем рассмотрение биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике по порядку с первого отрезка

$$A_0A_1.$$

Он является началом биссектрисы внутреннего левого нижнего угла прямоугольника, образует с основанием (в данном случае нижней стороной) прямоугольника угол

$$\alpha = \pi/4$$

и как гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника имеет равновеликие проекции на нижнюю горизонтальную сторону прямоугольника и на его левую вертикальную сторону, которой и равновелики (конгруэнтны) обе эти проекции величиной b ввиду нестрогого неравенства

$$a \geq b.$$

Если в этом нестрогом неравенстве осуществляется именно равенство

$$a = b,$$

то вся проблема становится не просто тривиальной, а именно простейшей:

1. Прямоугольник оказывается квадратом, биссектриса внутреннего угла прямоугольника по совместительству становится ещё и диагональю этого квадрата, наибольшая общая делящая мера его сторон

$$D\{a, b\} = a = b,$$

отношение его сторон

$$a/b = 1$$

выражается отношением взаимно простых натуральных чисел

$$r = 1$$

и

$$s = 1.$$

2. Биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике становится биссектральной ломаной отражений в квадрате, целиком состоит из этой диагонали, трёхуровневая иерархия сводится к одноуровневой, общее число отрезков биссектральной ломаной единично:

$$N_g = 1 = r + s - 1,$$

общая длина биссектральной ломаной составляет

$$L_g = 2^{1/2}a = 2^{1/2}b = 2^{1/2}ab/D\{a, b\} = 2^{1/2}rsD\{a, b\},$$

общее количество образуемых всеми самопересечениями биссектральной ломаной равных между собой квадратов со стороной $2^{1/2}D\{a, b\}$ нулевое:

$$Q_g = 0 = (a/D\{a, b\} - 1)(b/D\{a, b\} - 1)/2 = (r - 1)(s - 1)/2.$$

Следовательно, в случае a = b требуемая общая теорема проверена непосредственно и тем самым доказана.

Поэтому в дальнейшем можно ограничиться случаем строгого неравенства

$$a > b.$$

Разделим строго большее a на строго меньшее b нацело, вообще говоря, с неотрицательным остатком X_1 (который, в частности, может быть и нулевым):

$$a = [a/b]b + X_1.$$

Здесь для неполного целого частного [a/b] использовано известное обозначение целой части (антье, фр. entier) действительного числа. Она по определению является алгебраически наибольшим целым числом, не превышающим это действительное число, и обозначается этим действительным числом, заключённым в квадратные скобки, которые в данной научной монографии используются исключительно для обозначения целой части.

По модификации 2 первая часть B_0B_1 биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, на рисунке 3

$$A_0A_1A_2,$$

начинается в точке B_0, на рисунке 3 совпадающей с точкой E и с точкой A_0, в общем случае состоит из

$${}_{(2)}N_1 = [a/b]$$

отрезков общей длиной

$$_{(2)}L_1 = 2^{1/2}b[a/b]$$

и завершается точкой B_1, на рисунке 3 совпадающей с точкой A_2, перед правой вертикальной стороной прямоугольника перед дальнейшим отражением от неё на расстоянии

$$HB_1 = X_1 = a - b[a/b] \geq 0$$

от этой правой вертикальной стороны прямоугольника.

По модификации 1 каждая часть биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике завершается на его боковой стороне, которая противоположна той его боковой стороне, на которой эта часть начинается. Первая часть биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике B_0C_1, на рисунке 3

$$A_0A_1A_2A_3,$$

начинается в точке B_0, на рисунке 3 совпадающей с точкой E и с точкой A_0, при

$$HB_1 = X_1 = a - b[a/b] = 0$$

состоит из

$${}_{(1)}N_1 = {}_{(2)}N_1 = [a/b]$$

отрезков,

при

$$HB_1 = X_1 = a - b[a/b] > 0$$

состоит из

$${}_{(1)}N_1 = {}_{(2)}N_1 + 1 = [a/b] + 1$$

отрезков,

при

$$HB_1 = X_1 = a - b[a/b] \geq 0$$

общей длиной

$$_{(1)}L_1 = 2^{1/2}a = {}_{(2)}L_1 + 2^{1/2}X_1 = 2^{1/2}b[a/b] + 2^{1/2}(a - b[a/b]),$$

и завершается точкой C_1, на рисунке 3 совпадающей с точкой A_3, на правой вертикальной стороне HG прямоугольника

EFGH перед дальнейшим отражением от неё на расстоянии

$$HC_1 = X_1 = a - b[a/b] \geq 0$$

от того основания прямоугольника, на котором по модификации 2 завершается первая часть биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, на рисунке 3 от нижнего основания EH прямоугольника EFGH.

Если <u>неотрицательный</u> остаток <u>аннулируется</u>:

$$X_1 = a - b[a/b] = 0,$$

то имеет место <u>несколько</u> <u>более</u> <u>общий</u> и несколько более сложный (чем простейший выше) частный случай,

когда отношение сторон прямоугольника является <u>натуральным</u> числом

$$a/b = [a/b] = r,$$

$$s = 1,$$

$$D\{a, b\} = b,$$

биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике попадает в одну из вершин правой вертикальной стороны прямоугольника, на этом завершается именно целиком и исчерпывается своей первой частью, трёхуровневая иерархия сводится к двухуровневой,

общее число отрезков биссектральной ломаной составляет

$$N_g = r = r + s - 1,$$

общая длина биссектральной ломаной составляет

$$L_g = 2^{1/2}a = 2^{1/2}br = 2^{1/2}ab/D\{a, b\} = 2^{1/2}rsD\{a, b\},$$

общее количество образуемых всеми самопересечениями биссектральной ломаной равных между собой квадратов со стороной $2^{1/2}D\{a, b\}$ нулевое:

$$Q_g = 0 = (a/D\{a, b\} - 1)(b/D\{a, b\} - 1)/2 = (r - 1)(s - 1)/2.$$

Следовательно, в случае

$$X_1 = a - b[a/b] = 0$$

выполняется равносильное соотношение

$$a = br$$

при натуральном числе r, требуемая общая теорема проверена непосредственно и тем самым доказана.

Поэтому в дальнейшем можно ограничиться случаем строгого неравенства

$$X_1 = a - b[a/b] > 0.$$

По модификации 2 вторая часть B_1B_2 биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, на рисунке 3

$A_2A_3A_4A_5$,

в общем случае начинается точкой B_1 (на рисунке 3 совпадающей с точкой A_2), в качестве первых двух отрезков с суммой длин $2^{1/2}b$ имеет B_1C_1 и C_1D_1 (на рисунке 3 точки C_1 и D_1 совпадают с точками A_3 и

A_4 соответственно) и завершается точкой B_2 (на рисунке 3 совпадающей с точкой A_5) перед левой вертикальной стороной EF прямоугольника EFGH перед дальнейшим отражением от неё на расстоянии

$$EB_2 = X_2 \geq 0$$

от этой левой вертикальной стороны прямоугольника.

Поскольку нас интересуют общее число отрезков биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и общая её длина, то они подсчитываются накопительно (инкрементально), то есть нарастающим итогом, а именно для рассматриваемой и всех предшествующих ей частей биссектральной ломаной от её начала совместно, суммарно для сокращения количества обозначений и их упрощения.

Последовательно определяем:

$$HB_1 = HC_1 = X_1 = a - b[a/b];$$

$$GD_1 = b - X_1 = b - a + b[a/b] = b\{[a/b] + 1\} - a;$$

$$FD_1 = a - GD_1 = 2a - b\{[a/b] + 1\};$$

$$X_2 = EB_2 = FD_1 - b[FD_1/b] = 2a - b\{[a/b] + 1\} - b[2a - b\{[a/b] + 1\}/b] = 2a - b[a/b] - b - b[2a/b] + b[a/b] + b = 2a - b[2a/b];$$

$${}_{(2)}N_2 = {}_{(2)}N_1 + 2 + [FD_1/b] = [a/b] + 2 + [2a/b] - [a/b] - 1 = [2a/b] + 1;$$

$${}_{(2)}L_2 = {}_{(2)}L_1 + 2^{1/2}b + 2^{1/2}b[FD_1/b] = 2^{1/2}b[a/b] + 2^{1/2}b + 2^{1/2}b\{[2a/b] - [a/b] - 1\} = 2^{1/2}b[2a/b].$$

По модификации 1 вторая часть C_1C_2 биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, на рисунке 3

$A_3A_4A_5A_6$,

начинается в точке C_1, на рисунке 3 совпадающей с точкой A_3, и завершается точкой C_2, на рисунке 3 совпадающей с точкой A_6, на левой вертикальной стороне EF прямоугольника EFGH перед дальнейшим отражением от неё на расстоянии

$$EC_2 = X_2 = 2a - b[2a/b] \geq 0$$

от того основания прямоугольника, на котором по модификации 2 завершается вторая часть биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, на рисунке 3 от нижнего основания EH прямоугольника EFGH.

Первая и вторая части вместе состоят при

$$EB_2 = X_2 = 2a - b[2a/b] = 0$$

из

$${}_{(1)}N_2 = {}_{(2)}N_2 = [2a/b] + 1$$

отрезков,

при

$$EB_2 = X_2 = 2a - b[2a/b] > 0$$

из

$$_{(1)}N_2 = {}_{(2)}N_2 + 1 = [2a/b] + 1 + 1 = [2a/b] + 2$$

отрезков,

при

$$EB_2 = X_2 = 2a - b[2a/b] \geq 0$$

общей длиной

$$_{(1)}L_2 = 2^{1/2}2a = {}_{(2)}L_2 + 2^{1/2}X_2 =$$

$$2^{1/2}b[2a/b] + 2^{1/2}(2a - b[2a/b]).$$

Совместное рассмотрение формул по модификации 2 для первой части биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике

$${}_{(2)}N_1 = [a/b],$$

$${}_{(2)}L_1 = 2^{1/2}b[a/b],$$

$$X_1 = a - b[a/b]$$

и для объединения первой и второй частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике

$${}_{(2)}N_2 = [2a/b] + 1,$$

$${}_{(2)}L_2 = 2^{1/2}b[2a/b],$$

$$X_2 = 2a - b[2a/b]$$

позволяет нестрогим методом неполной индукции (наведения) сделать всего лишь возможное и только правдоподобием обоснованное допущение как предположение. Оно заключается в том, что по модификации 2 для объединения частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике с первой по имеющую номер n могут иметь место формулы

$$_{(2)}N_n = [na/b] + n - 1,$$

$$_{(2)}L_n = 2^{1/2}b[na/b],$$

$$X_n = na - b[na/b].$$

Строгим дедуктивным методом математической индукции (выведения) докажем эти пока предполагаемые формулы для объединения первых n частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике по модификации 2:

объединение первых n частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике состоит из общего числа

$$_{(2)}N_n = [na/b] + n - 1$$

отрезков общей (суммарной) длиной

$$_{(2)}L_n = 2^{1/2}b[na/b]$$

и завершается перед вертикальной стороной прямоугольника или на ней перед дальнейшим отражением от неё, если она не достигнута, на расстоянии

$$X_n = na - b[na/b]$$

от этой вертикальной стороны прямоугольника, нулевом именно и только в случае её достижения в одном из обоих её концов.

Для n = 1 (и даже для n = 2, что избыточно для метода математической индукции (выведения), однако потребовалось для улавливания всего лишь предчувствуемой закономерности нестрогим методом неполной индукции (наведения)) мы уже вывели и тем самым проверили эти формулы непосредственно.

Чтобы обосновать именно каждый шаг математической индукции, допустим, что эти формулы верны для некоторого произвольного натурального числа n, и на основании этого допущения докажем, что в таком случае эти формулы непременно верны и для следующего натурального числа n + 1.

Сугубо для наглядности используем рисунок 4 с дополнительными обозначениями буквами B, C, D с индексами по номерам частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике.

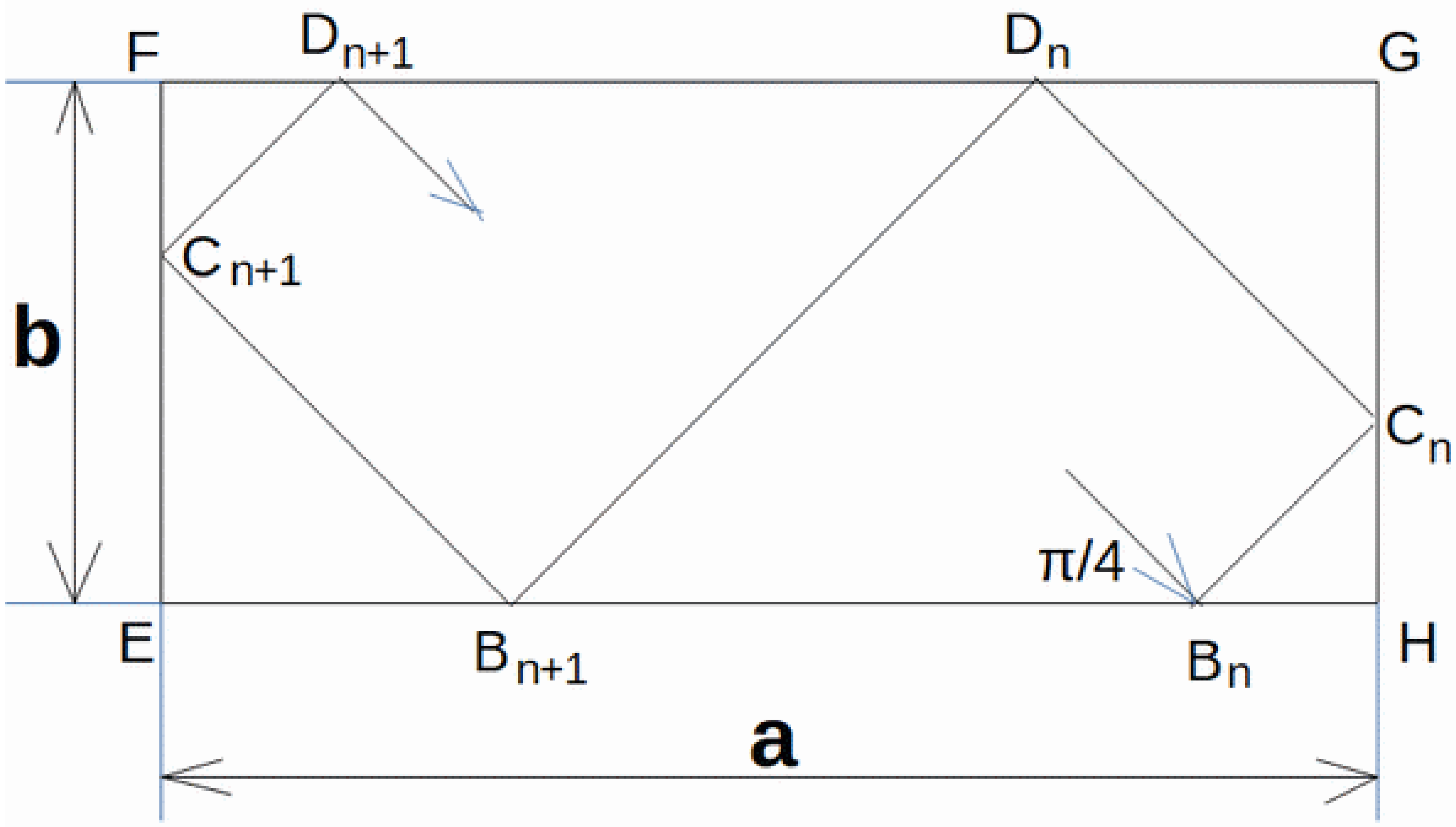

Рисунок 4. (n + 1)-я часть биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике $C_nD_n...B_{n+1}C_{n+1}$ по модификации 1 и $B_nC_nD_n...B_{n+1}$ по модификации 2.

Последовательно определяем:

$$HB_n = HC_n = X_n = na - b[na/b];$$

$$GD_n = b - X_n = b - na + b[na/b] =$$

$$b\{[na/b] + 1\} - na;$$

$$FD_n = a - GD_n = (n + 1)a - b\{[na/b] + 1\};$$

$$X_{n+1} = EB_{n+1} = FD_n - b[FD_n/b] =$$

$$(n + 1)a - b\{[na/b] + 1\} - b[(n + 1)a - b\{[na/b] + 1\}/b] =$$

$$(n + 1)a - b[na/b] - b - b[(n + 1)a/b] + b[na/b] + b =$$

$$(n + 1)a - b[(n + 1)a/b];$$

$${}_{(2)}N_{n+1} = {}_{(2)}N_n + 2 + [FD_n/b] =$$

$$[na/b] + n - 1 + [(n + 1)a/b] - [na/b] - 1 + 2 =$$

$$[(n + 1)a/b] + (n + 1) - 1;$$

$${}_{(2)}L_{n+1} = {}_{(2)}L_n + A_0A_1 + [FD_n/b]A_0A_1 = 2^{1/2}b[na/b] + 2^{1/2}b + 2^{1/2}b\{[(n + 1)a/b] - [na/b] - 1\} = 2^{1/2}b[(n + 1)a/b].$$

Тем самым строго доказаны дедуктивным методом математической индукции (выведения)
полученные нестрогим методом неполной индукции (наведения) формулы для объединения первых n частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике по модификации 2:
объединение первых n частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике состоит из общего числа

$$_{(2)}N_n = [na/b] + n - 1$$

отрезков общей (суммарной) длиной

$$_{(2)}L_n = 2^{1/2}b[na/b]$$

и завершается перед вертикальной стороной прямоугольника или на ней перед дальнейшим отражением от неё, если она не достигнута, на расстоянии

$$X_n = na - b[na/b]$$

от этой вертикальной стороны прямоугольника, нулевом именно и только в случае её достижения в одном из обоих её концов.

По модификации 1 (n + 1)-я часть биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике $C_nD_n...B_{n+1}C_{n+1}$ на рисунке 4 начинается в точке C_n на правой вертикальной стороне HG прямоугольника EFGH и завершается точкой C_{n+1} на левой вертикальной стороне EF прямоугольника EFGH перед дальнейшим отражением от неё на расстоянии

$$EC_{n+1} = X_{n+1} = (n + 1)a - b[(n + 1)a/b] \geq 0$$

от того основания прямоугольника, на котором по модификации 2 завершается (n + 1)-я часть $B_nC_nD_n...B_{n+1}$ биссектральной ломаной отражений в

прямоугольнике, на рисунке 4 от нижнего основания EH прямоугольника EFGH.

По модификации 1 объединение первых n частей биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике состоит при

$$HB_n = X_n = na - b[na/b] = 0$$

из

$$_{(1)}N_n = {}_{(2)}N_n = [na/b] + n - 1$$

отрезков,

при

$$HB_n = X_n = na - b[na/b] > 0$$

из

$$_{(1)}N_n = {}_{(2)}N_n + 1 = [na/b] + n - 1 + 1 = [na/b] + n$$

отрезков,

при

$$HB_n = X_n = na - b[na/b] \geq 0$$

общей длиной

$$_{(1)}L_n = 2^{1/2}na = {}_{(2)}L_n + 2^{1/2}X_n = 2^{1/2}b[na/b] + 2^{1/2}(na - b[na/b]).$$

Для конечности биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике необходимо и достаточно, чтобы для некоторого объединения первых n её частей для некоторого натурального числа n выполнялись равносильные условия

$$X_n = na - b[na/b] = 0,$$

$$na = b[na/b],$$

$$na/b = [na/b].$$

Число [na/b] натурально. Обозначим его буквой m:

$$m = [na/b].$$

Из последних двух равенств следует, что

$$na/b = m,$$

$$a/b = m/n,$$

где m и n – натуральные числа.

Следовательно, для конечности биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике необходимо

и достаточно, чтобы отношение его сторон (продолговатость a/b) было рациональным числом, то есть чтобы стороны прямоугольника были соизмеримы между собой.

При первом попадании в одну из вершин прямоугольника биссектральная ломаная завершается именно целиком.

Поэтому, хотя указанное рациональное число

$$a/b = m/n$$

может быть выражено бесконечным множеством пар натуральных чисел m и n ввиду равносильности

пар при умножении и числителя, и знаменателя дроби на одно и то же любое натуральное число, завершению биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике именно целиком соответствует наименьшее возможное натуральное число n_{min}, то есть взаимно простое с натуральным числом m_{min}. Это немедленно приводит нас к наибольшей общей делящей мере D{a, b} отрезков a и b и к паре взаимно простых натуральных чисел r и s таких, что

$$a/b = m/n = m_{min}/n_{min} = r/s,$$

$$m_{min} = r,\ n_{min} = s,\ (r, s) = 1,$$

$$a/r = b/s = D\{a, b\},$$

$$a = rD\{a, b\},\ b = sD\{a, b\}.$$

Отсюда следует, что при равносильных условиях рациональности продолговатости (отношения a/b сторон) прямоугольника и конечности биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике эта биссектральная ломаная состоит из ровно $n = n_{min} = s$ частей, а в строго доказанные методом математической индукции формулы следует подставить именно эти

$$m = m_{min} = r,\ n = n_{min} = s,\ D\{a, b\}.$$

В этом случае конечности биссектральной ломаной с взаимной простотой натуральных чисел r и s общее число N_g отрезков биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике равно

$$N_g = N_s = [na/b] + n - 1 = [sr/s] + s - 1 = r + s - 1.$$

В этом случае общая (суммарная) длина биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике составляет

$$L_g = L_s = 2^{1/2}b[na/b] = 2^{1/2}sD\{a, b\}[sr/s] =$$
$$2^{1/2}ab/D\{a, b\} = 2^{1/2}rsD\{a, b\}.$$

В этом случае конечности биссектральной ломаной с взаимной простотой натуральных чисел r и s конечным оказывается равносильное рисунку 3 изображение биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на рисунке 5 в относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координатах, а именно абсциссе x° = x/D{a, b} и ординате y° = y/D{a, b}, включая деление основания a/D{a, b} = rD{a, b}/D{a, b} = r и деление высоты b/D{a, b} = sD{a, b}/D{a, b} = s прямоугольника EFGH.

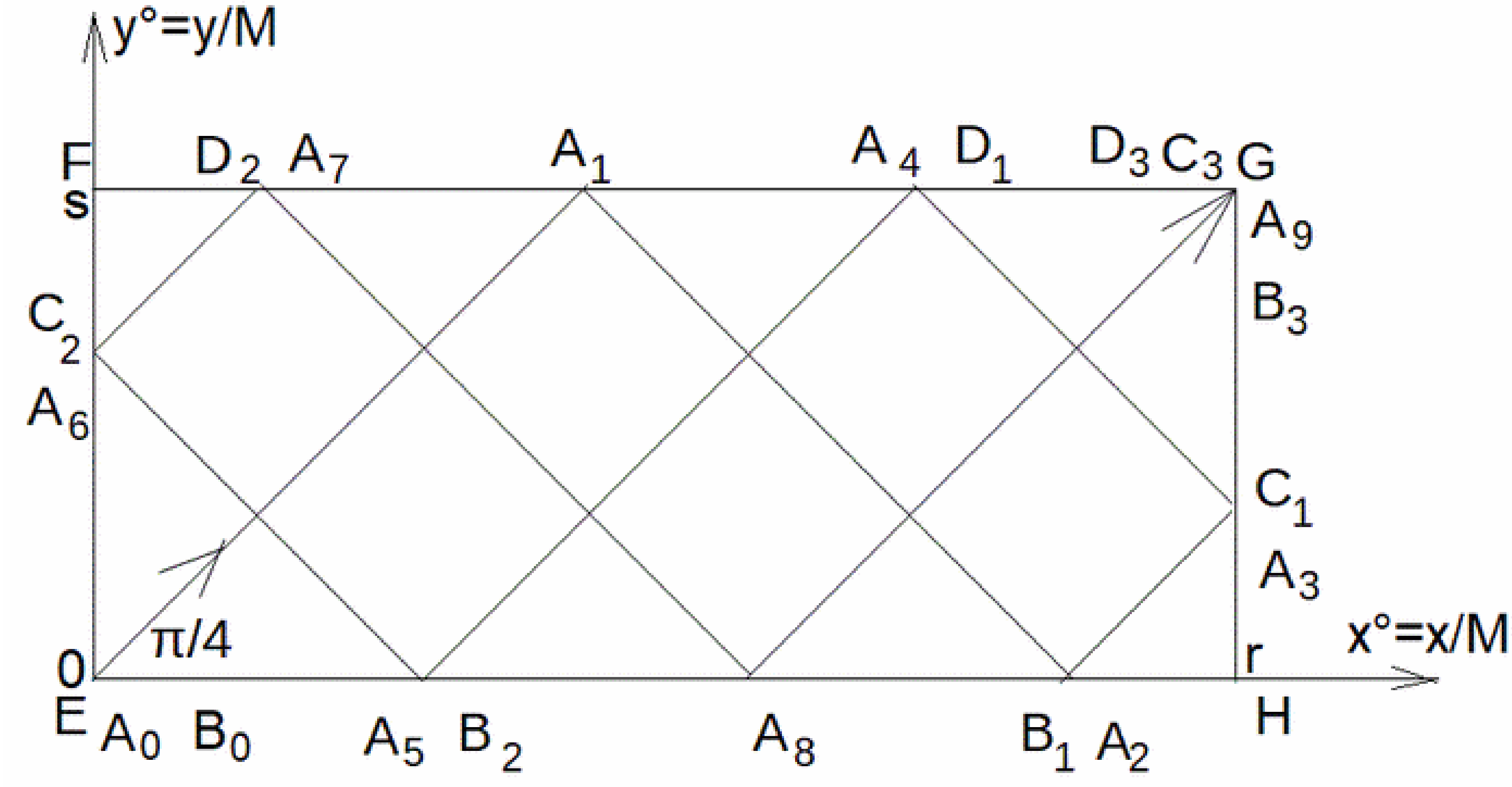

Рисунок 5. Изображение биссектральной ломаной в относительных координатах x° = x/D{a, b} и y° = y/D{a, b}.

В этом случае конечности биссектральной ломаной с взаимной простотой натуральных чисел r и s конечным, длинным по мере их произведения rs, является равносильное рисункам 3 и 5 изображение биссектральной ломаной без самопересечений с однонаправленным движением её проекции на горизонтальную ось только вправо на рисунке 6 в делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} координатах x° = x/D{a, b} и y° = y/D{a, b}, вынуждающем свою мелкомасштабность и условную единичность неполного частного от деления основания rD{a, b}/D{a, b} = r на высоту sD{a, b}/D{a, b} = s прямоугольника EFGH.

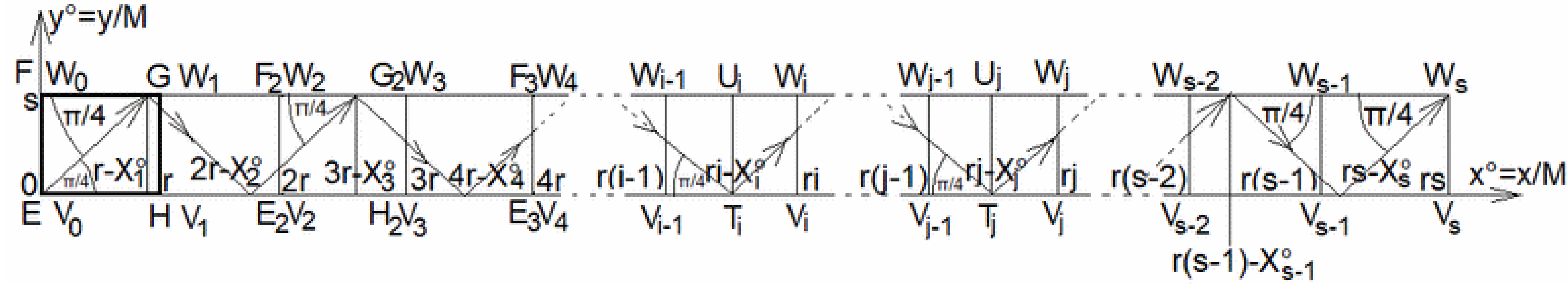

Рисунок 6. Изображение биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике без самопересечений её при прозрачности его боковых сторон и его соответствующих последовательных симметричных зеркальных отражениях относительно них. Приставлениями друг к другу справа выстраиваются в ряд в итоге s прямоугольников, равных исходному прямоугольнику EFGH.

При этом основания прямоугольника являются по-прежнему отражающими, а боковые стороны теперь уже считаются прозрачными, то есть биссектральная ломаная после достижения боковой стороны прямоугольника не отражается от неё, а проходит сквозь неё, так что приходится отразить этот прямоугольник зеркально симметрично самому себе относительно этой его боковой стороны и повторять такое

отражение вплоть до образования вместе с исходным прямоугольником EFGH прямоугольника $V_0W_0W_sV_s$ той же высоты sD{a, b}/D{a, b} = s с длиной rsD{a, b}/D{a, b} = rs, которая равна умноженной именно на это натуральное число s длине rD{a, b}/D{a, b} = r исходного прямоугольника EFGH. Равносильная самопересекающейся биссектральной ломаной в исходном прямоугольнике EFGH

несамопересекающаяся биссектральная ломаная в построенном прямоугольнике $V_0W_0W_sV_s$ начинается биссектрисой прямого угла $W_0V_0V_s$ и заканчивается биссектрисой прямого угла $W_0W_sV_s$, причём отражается только от оснований V_0V_s и W_0W_s, каждый раз образуя с ними угол $\pi/4$. Чтобы не загромождать рисунок 6, промежуточные вершины несамопересекающейся биссектральной ломаной, начинающейся в

точке V_0 и заканчивающейся в точке W_s, на нём не обозначаются, за двумя исключениями промежуточных вершин T_i и T_j с используемыми впоследствии i и j. Обе биссектральные ломаные – и самопересекающаяся при $r \geq s \geq 2$ в исходном прямоугольнике EFGH, и несамопересекающаяся при любых $r \geq s$ в завершающем прямоугольнике $V_0W_0W_sV_s$ – начинаются в точке E, при однонаправленном

движении непременно вправо своей проекции на горизонтальную ось $x°$ поочередно отражаются положительное целое число раз, не обязательно единичное, изображённое на рисунке 6, в последний раз на неотрицательном относительном расстоянии $X_1° = X_1/D\{a, b\}$ перед боковой стороной GH прямоугольника EFGH, относительной проекцией которой на горизонтальную ось $x°$ является положительное целое число r.

Этой точкой отражения (то ли на верхнем основании FG прямоугольника EFGH, как на рисунке 6, то ли на нижнем основании EH этого прямоугольника) с относительной абсциссой $x° = r - X_1°$ завершается первая часть обеих биссектральных ломаных согласно подробно рассмотренной выше модификации 2.

Если $X_1° = 0$, то имеет место подробно рассмотренный выше простой случай $r \geq s = 1$,

обе <u>биссектральные</u> ломаные на этом <u>завершаются</u> именно <u>целиком</u>, совпадают и сводятся к своей <u>общей</u> <u>первой</u> <u>части</u>, <u>исходный</u> прямоугольник EFGH оказывается также <u>завершающим</u>, никаких дополнительных построений не производится, а рисунок 6 отличается от рисунка 3 переходом к относительным, делённым на наибольшую общую дел<u>я</u>щую меру D{a, b} сторон прямоугольника, координатам, а именно абсциссе x° и ординате y°, и по существу не вносит ничего нового.

Если $X_1° > 0$, то имеет место случай $r \geq s \geq 2$, обе биссектральные ломаные после последнего отражения основаниями исходного прямоугольника EFGH в точке (то ли на верхнем основании FG прямоугольника EFGH, как на рисунке 6, то ли на нижнем основании EH этого прямоугольника) с относительной абсциссой $x° = r - X_1° < r$ продолжаются именно совместно до достижения боковой стороны GH включительно.

Этот последний общий отрезок обеих биссектральных ломаных является последним отрезком их общей первой части по модификации 1 и первым общим их отрезком их вторых частей, в дальнейшем различных, по модификации 2.

То есть после достижения боковой стороны GH исходного прямоугольника EFGH дальнейшие пути обеих биссектральных ломаных не имеют ничего общего между собой.

Самопересекающаяся биссектральная ломаная отражается от зеркальной для неё боковой стороны GH исходного прямоугольника EFGH, меняет направление движения своей проекции на горизонтальную ось на противоположное, теперь движущейся уже влево навстречу зеркальной для себя противоположной боковой стороне EF прямоугольника EFGH, отражается от неё в направлении зеркальной для себя

противоположной боковой стороны GH, и так далее в соответствии с предыдущими рассмотрениями и рисунками 3 и 4, тогда как предметом рисунка 6 является несамопересекающаяся биссектральная ломаная отражений в завершающем прямоугольнике $V_0W_0W_sV_s$. Несамопересекающаяся биссектральная ломаная отражений в завершающем прямоугольнике $V_0W_0W_sV_s$ отражается в нём

только зеркальными для себя его основаниями V_0V_s и W_0W_s, на его боковых сторонах V_0W_0 и V_sW_s только начинается и завершается, так что ни до отражений от них, ни до прохождений через них дело не доходит.

Целесообразно принять разбиение несамопересекающейся биссектральной ломаной на части именно по модификации 1, по которой части обеих биссектральных ломаных имеют однонаправленные проекции

на горизонтальную ось как раз в промежутках между боковыми сторонами каждого из прямоугольников, равных исходному прямоугольнику EFGH. Несамопересекающаяся биссектральная ломаная отражений в завершающем прямоугольнике $V_0W_0W_sV_s$ проходит насквозь, сохраняя своё направление, через прозрачную для неё боковую сторону GH исходного прямоугольника EFGH, имеющую

относительную, делённую на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, абсциссу x° = r, сохраняет неизменное направление вправо движения своей проекции на горизонтальную ось, в частности в своей второй части в прямоугольнике HGF_2E_2, полученном зеркально симметричным отражением исходного прямоугольника EFGH относительно его боковой стороны GH, и

отражается и в этих пределах своей второй части только основаниями прямоугольника HGF_2E_2, в последний раз в точке (то ли на нижнем основании, как на рисунке 6, то ли на верхнем основании прямоугольника HGF_2E_2) с относительной, делённой на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, абсциссой

$$x^\circ = 2r - X_2^\circ = 2r - X_2/D\{a, b\}.$$

Несамопересекающаяся биссектральная ломаная отражений в завершающем прямоугольнике $V_0W_0W_sV_s$ проходит насквозь, сохраняя своё направление, через прозрачную для неё боковую сторону E_2F_2 прямоугольника HGF_2E_2, имеющую относительную, делённую на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, абсциссу x° = 2r, сохраняет неизменное направление вправо движения своей проекции на горизонтальную ось, в частности в своей третьей части в прямоугольнике $E_2F_2G_2H_2$, полученном

зеркально симметричным отражением прямоугольника HGF_2E_2 относительно его боковой стороны E_2F_2, и отражается и в этих пределах своей третьей части только основаниями прямоугольника $E_2F_2G_2H_2$, в последний раз в точке (то ли на верхнем основании, как на рисунке 6, то ли на нижнем основании прямоугольника $E_2F_2G_2H_2$) с относительной, делённой на наибольшую общую делящую меру $D\{a, b\}$ сторон прямоугольника, абсциссой

$$x° = 3r - X_3° = 3r - X_3/D\{a, b\}.$$

Несамопересекающаяся биссектральная ломаная отражений в завершающем прямоугольнике $V_0W_0W_sV_s$ проходит насквозь, сохраняя своё направление, через прозрачную для неё боковую сторону H_2G_2 прямоугольника $E_2F_2G_2H_2$, имеющую относительную, делённую на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, абсциссу x° = 3r, сохраняет неизменное направление вправо движения своей проекции на горизонтальную ось, в частности в своей четвёртой части в прямоугольнике $H_2G_2F_3E_3$, полученном зеркально симметричным отражением прямоугольника $E_2F_2G_2H_2$ относительно его

боковой стороны H_2G_2, и отражается и в этих пределах своей четвёртой части только основаниями прямоугольника $H_2G_2F_3E_3$, в последний раз в точке (то ли на нижнем основании, как на рисунке 6, то ли на верхнем основании прямоугольника $H_2G_2F_3E_3$) с относительной, делённой на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, абсциссой

$$x° = 4r - X_4° = 4r - X_4/D\{a, b\}.$$

По основной теореме обе биссектральные ломаные – и самопересекающаяся, и несамопересекающаяся – состоят каждая ровно из s частей.

Рассмотренная здесь система обозначений выявляет как происхождение приставляемых справа прямоугольников, равных исходному прямоугольнику EFGH, так и очевидную закономерную периодичность, то есть в смысле парных философских категорий исторического и логического уместна исторически, однако не логически, поскольку весьма неудобна для выражения зависимости обозначений прямоугольника от его порядкового номера в конечной последовательности из s элементов. Поэтому дополнительно вводится логическая система

обозначений на рисунке 6. А именно, прямоугольник с номером i ($1 \leq i \leq s$) обозначается $V_{i-1}W_{i-1}W_iV_i$, а весь завершающий (итоговый) прямоугольник посредством $V_0W_0W_sV_s$. По этой системе обозначаются исходный прямоугольник как первый $V_0W_0W_1V_1$, второй прямоугольник $V_1W_1W_2V_2$, третий прямоугольник $V_2W_2W_3V_3$, четвёртый прямоугольник $V_3W_3W_4V_4$, i-тый прямоугольник $V_{i-1}W_{i-1}W_iV_i$, j-тый прямоугольник $V_{j-1}W_{j-1}W_jV_j$ и последний, s-тый прямоугольник $V_{s-1}W_{s-1}W_sV_s$.

Теорема различности всех остатков. Любые остатки X_i и X_j между собой и любые относительные, делённые на наибольшую общую делящую меру $D\{a, b\}$ сторон прямоугольника, остатки $X_i°$ и $X_j°$ между собой при различных между собой указателях (индексах, номерах) i ($1 \leq i \leq s$) и j ($1 \leq j \leq s$) непременно различны.

Доказательство методом от противоречащего.

Достаточно ограничиться доказательством для относительных остатков $X_i°$ и $X_j°$, равных соответствующим остаткам X_i и X_j, делённым на одну и ту же непременно положительную наибольшую общую делящую меру D{a, b} основания a и высоты b прямоугольника.

Действительно, имеют место следующие равенства:

$$X_i = ia - [ia/b]b;$$

$$X_j = ja - [ja/b]b;$$

$$a = rD\{a, b\};$$

$$b = sD\{a, b\};$$

$$X_i° = X_i/D\{a, b\} = ia/D\{a, b\} - [ia/b]b/D\{a, b\} = ir - [ir/s]s;$$

$$X_j° = X_j/D\{a, b\} = ja/D\{a, b\} - [ja/b]b/D\{a, b\} = jr - [jr/s]s.$$

Пусть вопреки теореме существуют такие различные между собой положительные целые числа i и j в пределах от единицы до s включительно, что совместно

$$i \neq j,$$

$$X_i° = X_j°.$$

Ввиду симметрии i и j можно полагать

$$i < j.$$

Тогда

$$X_i° = ir - [ir/s]s = X_j° = jr - [jr/s]s;$$

$$jr - [jr/s]s = ir - [ir/s]s;$$

$$jr - ir = [jr/s]s - [ir/s]s;$$

$$(j - i)r = ([jr/s] - [ir/s])s;$$

$$r/s = ([jr/s] - [ir/s])/(j - i).$$

Последнее равенство получено из предпоследнего равенства его законным делением на заведомо положительное произведение (j - i)s. В обоих этих равенствах разность ([jr/s] - [ir/s]) двух целых частей поэтому является целым числом, причём непременно положительным ввиду положительности всех трёх остальных сомножителей (j - i), r, s в предпоследнем равенстве.

Однако последнее равенство противоречит принятому ранее условию непременной несократимости дроби r/s, которая якобы равна дроби ([jr/s] - [ir/s])/(j - i) со знаменателем (j - i), непременно строго меньшим, чем s, ввиду неравенств

$$1 \le i \le s,$$

$$1 \le j \le s,$$

$$0 < (j - i) < s.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема взаимной неотрицательной целочисленности и суммарной чётности относительных, делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, координат, а именно абсциссы x° и ординаты y°, точек самопересекающейся или несамопересекающейся биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике.

Если хотя бы одна из относительных, делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, координат, а именно абсциссы x° и ординаты y°, произвольной точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике является неотрицательным целым числом, то и другая относительная координата этой же точки является неотрицательным целым числом, причём оба этих числа являются непременно одновременно или чётными, или нечётными, так что их сумма всегда чётна.

Доказательство ведётся методом математической индукции.

Начальная точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеет как раз обе нулевые относительные абсциссу x° и ординату y° с именно нулевой их суммой и поэтому удовлетворяет теореме.

Допустим, что считающаяся предыдущей некоторая произвольная точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, удовлетворяющая условию теоремы о том, что хотя бы одна из

относительных, делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, координат, а именно абсциссы x° и ординаты y°, этой точки является неотрицательным целым числом, удовлетворяет и заключению теоремы, так что и другая относительная координата этой же точки является неотрицательным целым числом, причём оба этих числа являются непременно одновременно или чётными, или нечётными, то есть их сумма чётна.

Теперь, чтобы сделать требуемый индукционный шаг, достаточно доказать, что непосредственно следующая обладающая одной из относительных координат, непременно выражающейся неотрицательным целым числом, точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике удовлетворяет и заключению теоремы, так что и другая относительная координата этой же точки является неотрицательным целым

числом, причём оба этих числа являются непременно одновременно или чётными, или нечётными, то есть их сумма чётна. Действительно, по допущению индукционного шага обе относительные, делённые на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, координаты, а именно абсцисса x° и ордината y°, обладающей одной из относительных координат, непременно выражающейся неотрицательным

целым числом, предыдущей точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике являются неотрицательными целыми числами, оба непременно одновременно или чётными, или нечётными, то есть их сумма чётна.

Любой отрезок биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике образует угол $\pi/4$ с любой из сторон этого прямоугольника и поэтому с любой из осей принятой системы

относительных, делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, координат, а именно абсциссы x° и ординаты y°.

Поэтому непосредственно следующая обладающая одной из относительных координат, непременно выражающейся неотрицательным целым числом, точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеет относительные

координаты, а именно абсциссу x° и ординату y°, отличающиеся от соответствующих относительных координат предыдущей точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике прибавлением ровно единицы с положительным или отрицательным знаком, причём возможны все четыре сочетания знаков. При любом из их сочетаний целочисленность обеих относительных координат абсциссы x° и

ординаты y° сохраняется, а чётность обеих непременно одновременно или утрачивается, если она была, или появляется, если её не было у предыдущей точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, то есть сумма обеих относительных координат абсциссы x° и ординаты y° такой непосредственно следующей точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике чётна.

Неотрицательность обеих относительных координат абсциссы x° и ординаты y° этой точки следует из того, что вся биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике именно целиком находится в первом квадранте принятой системы относительных координат абсциссы x° и ординаты y°.

Тем самым теорема полностью доказана методом математической индукции.

Теорема. Все лежащие на горизонтальной относительной оси Ox° точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеют непременно чётные неотрицательные целые относительные, делённые на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, абсциссы x°.

Доказательство.

Каждая из точек горизонтальной относительной оси Ox° имеет непременно

нулевую относительную ординату y°. Поэтому каждая лежащая на горизонтальной относительной оси Ox° точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеет целочисленную, а именно нулевую, относительную ординату y°. Тогда по теореме взаимной неотрицательной целочисленности и суммарной чётности относительных координат точек самопересекающейся или несамопересекающейся биссектральной

ломаной отражений в прямоугольнике и другая относительная координата, в данном случае абсцисса x°, этой же точки является неотрицательным целым числом, причём именно чётным, поскольку оба этих числа являются непременно одновременно или чётными, или нечётными, так что их сумма всегда чётна. Тем самым теорема доказана.

Теорема. Все лежащие на вертикальной относительной оси Oy° точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеют непременно чётные неотрицательные целые относительные, делённые на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, ординаты y°.

Доказательство.

Каждая из точек вертикальной относительной оси Oy° имеет непременно нулевую

относительную абсциссу x°. Поэтому каждая лежащая на вертикальной относительной оси Oy° точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеет целочисленную, а именно нулевую, относительную абсциссу x°. Тогда по теореме взаимной неотрицательной целочисленности и суммарной чётности относительных координат абсциссы x° и ординаты y° точек самопересекающейся или

несамопересекающейся биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и другая относительная координата, в данном случае ордината y°, этой же точки является неотрицательным целым числом, причём именно чётным, поскольку оба этих числа являются непременно одновременно или чётными, или нечётными, так что их сумма всегда чётна. Тем самым теорема доказана.

Замечание. Последние две теоремы относились к обеим сторонам прямоугольника, лежащим на горизонтальной и вертикальной относительных осях избранной системы относительных, делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, координат, а именно абсциссы x° и ординаты y°. Остаётся рассмотреть обе противоположные этим сторонам стороны прямоугольника.

Относительная, делённая на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, абсцисса x° является нулевой для левой боковой стороны прямоугольника и равна r для его правой боковой стороны. Относительная, делённая на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, ордината y° является нулевой для нижнего основания прямоугольника и равна s для его верхнего основания.

Кроме того, требуется рассмотреть всевозможные допустимые сочетания чётности или нечётности каждого из обоих непременно положительных целых чисел, а именно относительной длины прямоугольника r и его относительной высоты s. Случай одновременной чётности обоих этих чисел невозможен, поскольку при этом нарушается принятое условие взаимной простоты этих чисел, у которых тогда

появился бы превышающий единицу общий делитель, равный двум. Поэтому подлежат рассмотрению все три возможных случая: одновременной нечётности относительной длины прямоугольника r и его относительной высоты s, чётности относительной длины прямоугольника r при нечётности его относительной высоты s и, наоборот, нечётности относительной длины прямоугольника r при чётности его относительной высоты s.

Теорема. Если относительная, делённая на наибольшую общую деляющую меру D{a, b} сторон прямоугольника, его длина r является именно нечётным положительным целым числом, то все точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике на правой боковой стороне прямоугольника имеют непременно нечётные положительные целые относительные ординаты y°.

Доказательство.

Каждая из точек правой боковой стороны прямоугольника имеет положительную целую относительную абсциссу x° = r, по условию теоремы непременно нечётную. Поэтому каждая лежащая на правой боковой стороне прямоугольника точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеет непременно нечётную положительную целую относительную абсциссу x° = r. Тогда по теореме взаимной неотрицательной

целочисленности и суммарной чётности относительных координат абсциссы x° и ординаты y° точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и другая относительная координата, в данном случае ордината y°, этой же точки является неотрицательным целым числом, причём именно нечётным, поскольку оба этих числа являются непременно одновременно или чётными, или нечётными, так что их сумма всегда чётна. Тем самым теорема доказана.

Теорема. Если относительная, делённая на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, его длина r является именно чётным положительным целым числом, то все точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике на правой боковой стороне прямоугольника имеют непременно чётные положительные целые относительные ординаты y°.

Доказательство.

Каждая из точек правой боковой стороны прямоугольника имеет положительную целую относительную абсциссу x° = r, по условию теоремы непременно чётную. Поэтому каждая лежащая на правой боковой стороне точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеет непременно чётную положительную целую относительную абсциссу x° = r. Тогда по теореме взаимной неотрицательной целочисленности и

суммарной чётности относительных координат абсциссы x° и ординаты y° точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и другая относительная координата, в данном случае ордината y°, этой же точки является неотрицательным целым числом, причём именно чётным, поскольку оба этих числа являются непременно одновременно или чётными, или нечётными, так что их сумма всегда чётна. Тем самым теорема доказана.

Теорема. Если относительная, делённая на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, его высота s является именно нечётным положительным целым числом, то все точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике на верхнем основании прямоугольника имеют непременно нечётные положительные целые относительные абсциссы x°.

Доказательство.

Каждая из точек верхнего основания прямоугольника имеет положительную целую относительную ординату y° = s, по условию теоремы непременно нечётную. Поэтому каждая лежащая на верхнем основании прямоугольника точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеет непременно нечётную положительную целую относительную ординату y° = s. Тогда по теореме взаимной неотрицательной

целочисленности и суммарной чётности относительных координат абсциссы x° и ординаты y° точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и другая относительная координата, в данном случае абсцисса x°, этой же точки является неотрицательным целым числом, причём именно нечётным, поскольку оба этих числа являются непременно одновременно или чётными, или нечётными, так что их сумма всегда чётна. Тем самым теорема доказана.

Теорема. Если относительная, делённая на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, его высота s является именно чётным положительным целым числом, то все точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике на верхнем основании прямоугольника имеют непременно чётные положительные целые относительные абсциссы x°.

Доказательство.

Каждая из точек верхнего основания прямоугольника имеет положительную целую относительную ординату y° = s, по условию теоремы непременно чётную. Поэтому каждая лежащая на верхнем основании прямоугольника точка биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике имеет непременно чётную положительную целую относительную ординату y° = s. Тогда по теореме взаимной неотрицательной

целочисленности и суммарной чётности относительных координат абсциссы x° и ординаты y° точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и другая относительная координата, в данном случае абсцисса x°, этой же точки является неотрицательным целым числом, причём именно чётным, поскольку оба этих числа являются непременно одновременно или чётными, или нечётными, так что их сумма всегда чётна. Тем самым теорема доказана.

Замечание. В настоящей научной монографии выше были открыты и доказаны основной теоремой явление и закон невозвратимости биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, а также её непременной конечности и поэтому завершаемости как раз целиком именно и только при соизмеримости сторон прямоугольника и поэтому при наличии их наибольшей общей делящей меры D{a, b}. Однако при этом оставался

совершенно открытым вопрос о том, в какой именно из всех остальных трёх вершин прямоугольника и при каких именно соответствующих дополнительных условиях биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике завершается именно целиком. Этот вопрос полностью решается следующими тремя открытыми явлениями и законами и доказывающими их теоремами завершения непременно конечной

биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, вполне исчерпывающими указанные выше три всевозможных именно допустимых сочетания чётности или нечётности относительных, делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, длины прямоугольника r и его высоты s.

Общее начало доказательств всех трёх следующих теорем.

Принятая система относительных, делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника, координат, а именно абсциссы x° и ординаты y°, обеспечивает следующие свойства.

Исходная для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина прямоугольника находится как раз в начале этой системы относительных координат и поэтому имеет

нулевые относительные абсциссу x° и ординату y°, так что и сумма x° + y° обеих относительных координат является именно нулевой.

Смежная по нижнему основанию прямоугольника с исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина прямоугольника находится правее начала этой системы относительных координат на относительную

длину r прямоугольника и поэтому имеет относительную абсциссу x° = r и именно нулевую относительную ординату y° с суммой x° + y° = r обеих относительных координат. Смежная по левой боковой стороне прямоугольника с исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина прямоугольника находится выше начала этой системы относительных координат на относительную

высоту s прямоугольника и поэтому имеет именно нулевую относительную абсциссу x° и относительную ординату y° = s с суммой x° + y° = s обеих относительных координат.

Противоположная исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина прямоугольника находится

правее начала этой системы относительных координат на относительную длину r прямоугольника и выше начала этой системы относительных координат на относительную высоту s прямоугольника и поэтому имеет относительную абсциссу x° = r и относительную ординату y° = s с суммой x° + y° = r + s обеих относительных координат.

Первые открытые явление и закон и доказывающая их теорема завершения непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. При одновременной нечётности как относительной длины r прямоугольника, так и его относительной высоты s непременно конечная биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике

завершается именно целиком в вершине прямоугольника, которая противоположна исходной для биссектральной ломаной вершине.

Доказательство.

По условию теоремы как относительная длина r, так и относительная высота s прямоугольника являются именно нечётными положительными целыми числами, что показано на рисунке 7.

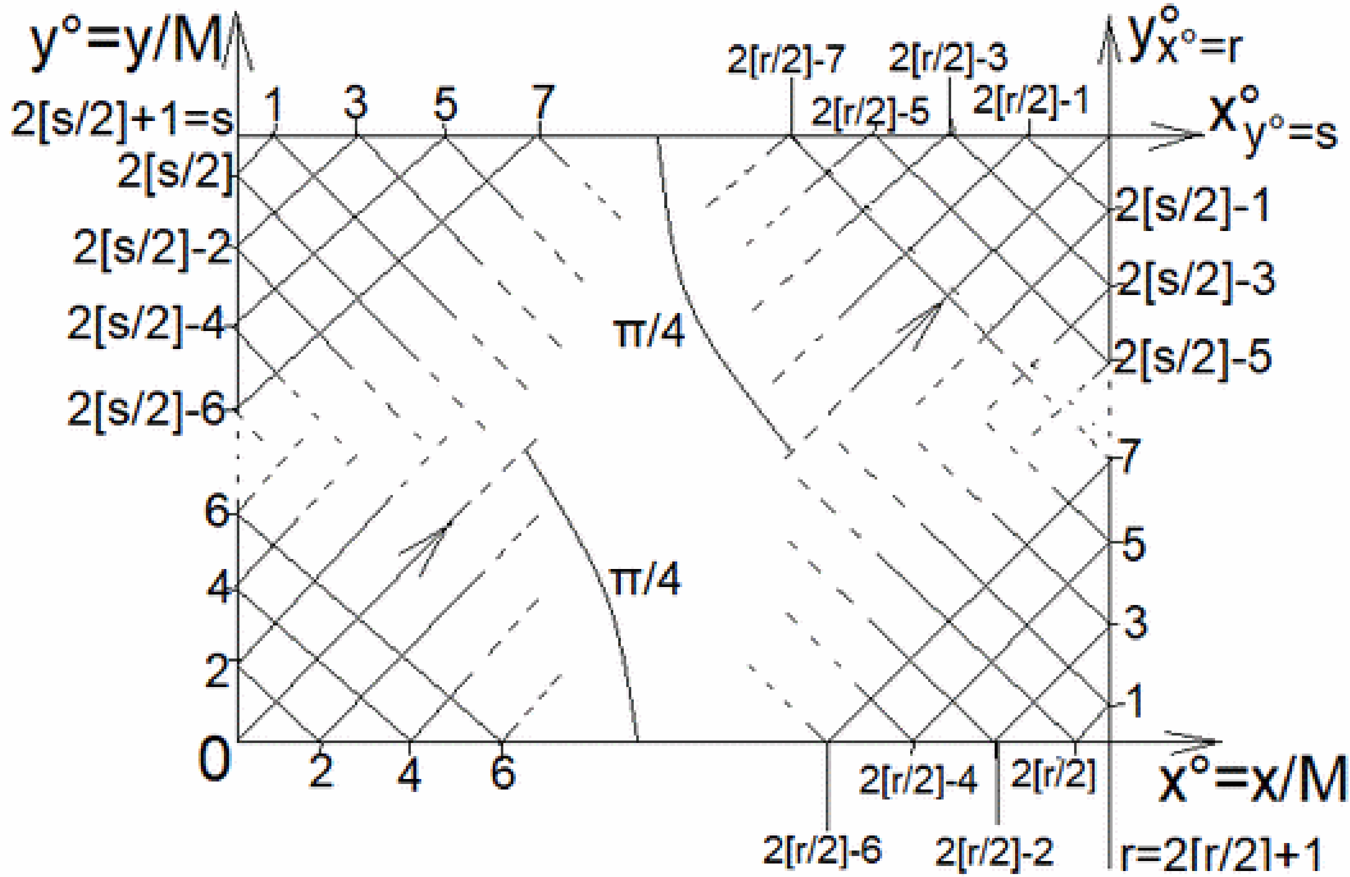

Рисунок 7. Биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике с нечётными относительными длиной r и высотой s.

Тогда для обеих смежных с исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершин прямоугольника суммы x° + y° обеих относительных координат именно нечётны. Поэтому по теореме взаимной неотрицательной целочисленности и суммарной чётности относительных координат абсциссы x° и ординаты y° точек биссектральной ломаной отражений в

прямоугольнике обе смежные с исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершины прямоугольника вообще не могут принадлежать биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, которая поэтому не может завершаться целиком ни в одной из этих обеих смежных с исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершин прямоугольника.

Зато для вершины прямоугольника, которая противоположна исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершине прямоугольника, сумма x° + y° = r + s обеих относительных координат именно чётна.

По условию теоремы биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике непременно конечна и поэтому завершается именно целиком в одной из четырёх вершин прямоугольника.

Эта искомая завершающая для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина прямоугольника не может быть ни исходной для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершиной прямоугольника по закону невозвратимости, ни вершиной прямоугольника, смежной с этой исходной вершиной, как доказано выше.

Поэтому ввиду полноты системы всех рассмотренных возможностей единственная возможная завершающая для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина прямоугольника является и действительной, так что биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике завершается именно целиком в вершине прямоугольника, которая противоположна исходной для биссектральной ломаной вершине, что и требовалось доказать.

Вторые открытые явление и закон и доказывающая их теорема завершения непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. При совместных чётности относительной длины r прямоугольника и нечётности его относительной высоты s непременно конечная биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике завершается именно целиком в вершине прямоугольника, которая смежна

по нижнему основанию с вершиной прямоугольника, исходной для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике.

Доказательство.

По условию теоремы относительная длина r прямоугольника является именно чётным положительным целым числом, а относительная высота s прямоугольника является именно нечётным положительным целым числом, что показано на рисунке 8.

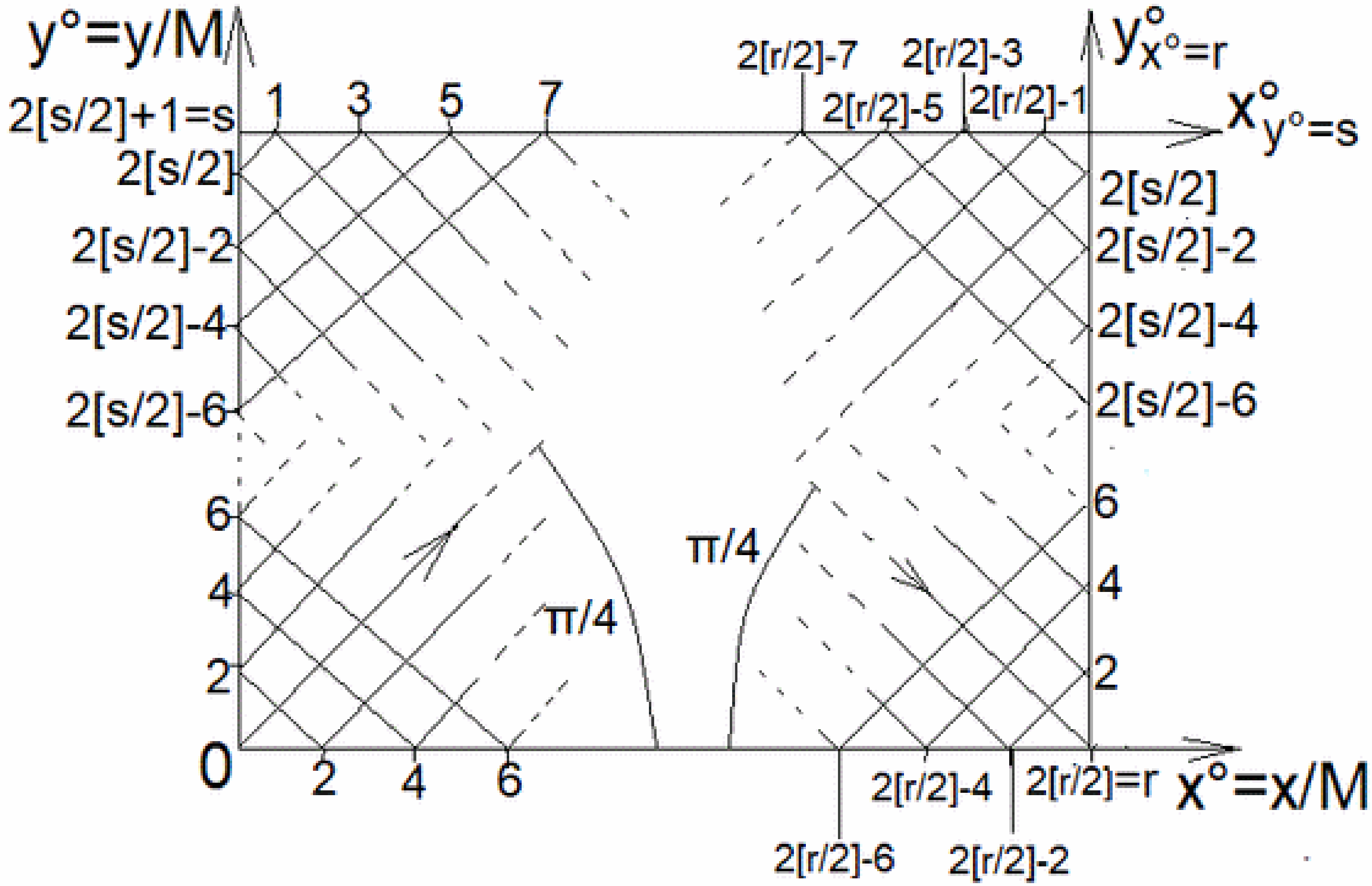

Рисунок 8. Биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике с чётной относительной длиной r и нечётной относительной высотой s.

Тогда для вершины прямоугольника, смежной по левой боковой стороне с вершиной прямоугольника, исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, сумма x° + y° = s обеих относительных координат именно нечётна.

И для вершины прямоугольника, которая противоположна исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершине прямоугольника,

сумма x° + y° = r + s обеих относительных координат именно нечётна.
Поэтому по теореме взаимной неотрицательной целочисленности и суммарной чётности относительных координат абсциссы x° и ординаты y° точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике как вершина прямоугольника, смежная по левой боковой стороне с вершиной прямоугольника,

исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, так и вершина прямоугольника, которая противоположна исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, вообще не могут принадлежать биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, которая поэтому не может завершаться целиком ни в одной из этих обеих вершин прямоугольника.

Зато для вершины прямоугольника, смежной по нижнему основанию с вершиной прямоугольника, исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, сумма x° + y° = r обеих относительных координат именно чётна.

По условию теоремы биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике непременно конечна и поэтому завершается именно целиком в одной из четырёх вершин прямоугольника.

Эта искомая завершающая для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина прямоугольника не может быть ни исходной для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершиной прямоугольника по закону невозвратимости, ни вершиной прямоугольника, смежной по левой боковой стороне с этой исходной вершиной, ни вершиной прямоугольника, которая противоположна этой исходной вершине, как доказано выше.

Поэтому ввиду полноты системы всех рассмотренных возможностей единственная возможная завершающая для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина прямоугольника является и действительной, так что биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике завершается именно целиком в вершине прямоугольника, которая смежна по нижнему основанию с вершиной прямоугольника, исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, что и требовалось доказать.

Третьи открытые явление и закон и доказывающая их теорема завершения непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. При совместных нечётности относительной длины r прямоугольника и чётности его относительной высоты s непременно конечная биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике завершается именно целиком в вершине прямоугольника, которая смежна

по левой боковой стороне с вершиной прямоугольника, исходной для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике.

Доказательство.

По условию теоремы относительная длина r прямоугольника является именно нечётным положительным целым числом, а относительная высота s прямоугольника является именно чётным положительным целым числом, что показано на рисунке 9.

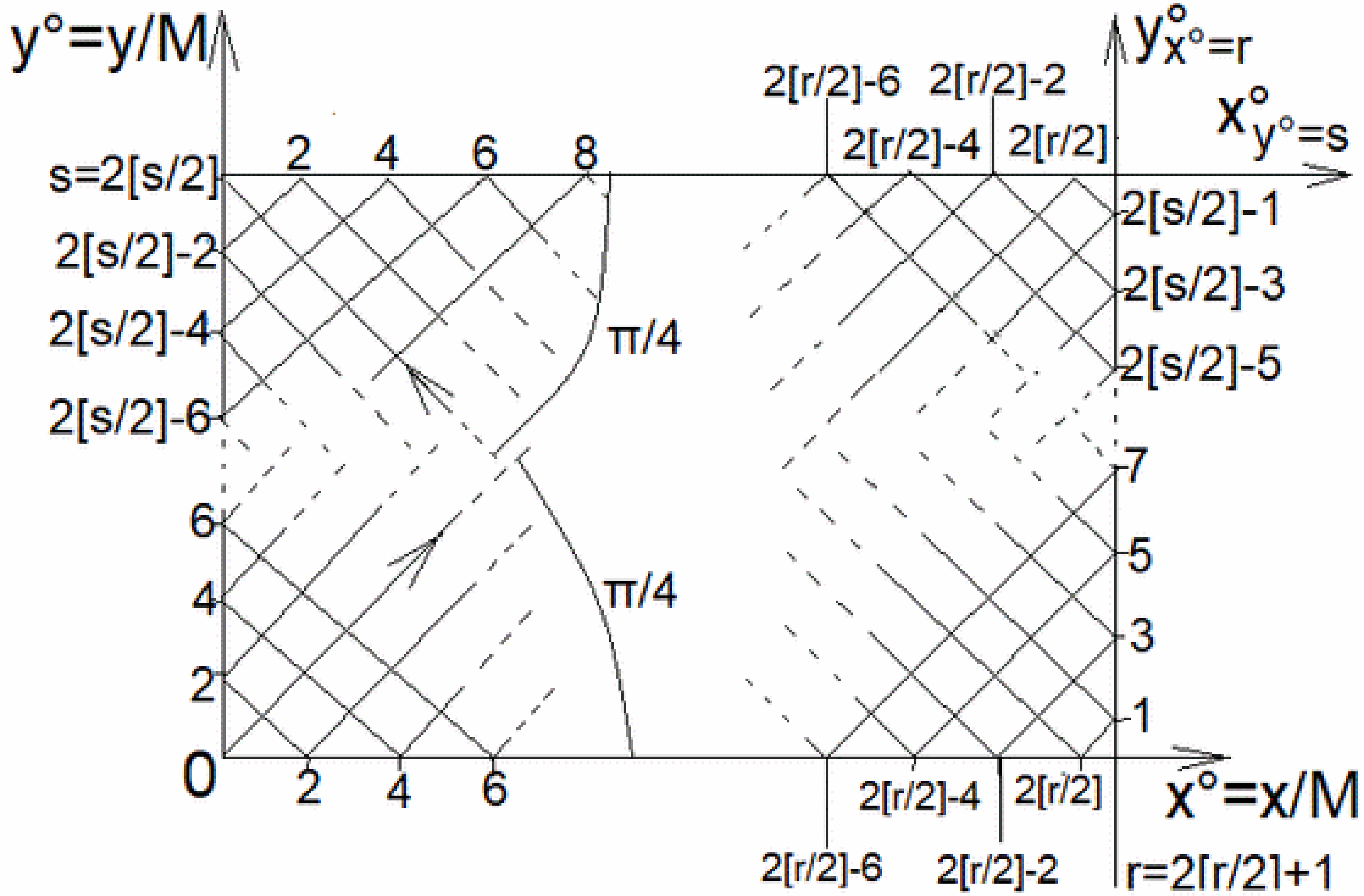

Рисунок 9. Биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике с нечётной относительной длиной r и чётной относительной высотой s.

Тогда для вершины прямоугольника, смежной по нижнему основанию с вершиной прямоугольника, исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, сумма $x° + y° = r$ обеих относительных координат именно нечётна.

И для вершины прямоугольника, которая противоположна исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершине прямоугольника,

сумма x° + y° = r + s обеих относительных координат именно нечётна.

Поэтому по теореме взаимной неотрицательной целочисленности и суммарной чётности относительных координат абсциссы x° и ординаты y° точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике как вершина прямоугольника, смежная по нижнему основанию с вершиной прямоугольника,

исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, так и вершина прямоугольника, которая противоположна исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, вообще не могут принадлежать биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, которая поэтому не может завершаться целиком ни в одной из этих обеих вершин прямоугольника.

Зато для вершины прямоугольника, смежной по левой боковой стороне с вершиной прямоугольника, исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, сумма x° + y° = s обеих относительных координат именно чётна.

По условию теоремы биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике непременно конечна и поэтому завершается именно целиком в одной из четырёх вершин прямоугольника.

Эта искомая завершающая для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина прямоугольника не может быть ни исходной для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершиной прямоугольника по закону невозвратимости, ни вершиной прямоугольника, смежной по нижнему

основанию с этой исходной вершиной, ни вершиной прямоугольника, которая противоположна этой исходной вершине, как доказано выше.

Поэтому ввиду полноты системы всех рассмотренных возможностей единственная возможная завершающая для биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике вершина

прямоугольника является и действительной, так что биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике завершается именно целиком в вершине прямоугольника, которая смежна по левой боковой стороне с вершиной прямоугольника, исходной для непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, что и требовалось доказать.

Теорема. Все самопересечения непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике образуют равномерную квадратную сетку с диагональю каждого квадрата, равной двукратной наибольшей общей делящей мере D{a, b} сторон прямоугольника, и с общим количеством квадратов этой сетки, равным полупроизведению уменьшенных на единицу относительных сторон прямоугольника, делённых на их наибольшую общую делящую меру D{a, b}.

Доказательство.

Вновь используется прежняя наиболее удобная система относительных координат абсциссы x° и ординаты y° с относительными длиной r и высотой s прямоугольника.

По теореме о непременной чётности относительных абсцисс x° всех лежащих на их оси Ox° точек непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике этими относительными

абсциссами x° могут быть только чётные неотрицательные целые числа, не превышающие относительной длины r прямоугольника:

0, 2, 4, 6, ... , 2[r/2].

Общее количество точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на оси Ox° относительных абсцисс на рисунке 5 проще всего определить по равносильной именно несамопересекающейся

биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике $V_0W_0W_sV_s$ на рисунке 6. Последовательность всех таких точек начинается с нуля, за которым следуют с промежутками 2s между соседними точками все остальные точки на отрезке V_0V_s длиной rs. Поэтому наличествуют

$$[rs/(2s)] = [r/2]$$

таких следующих за нулём точек, то есть ровно столько же, сколько следующих за

нулём и в приведённой имеющей разность 2 конечной арифметической прогрессии

0, 2, 4, 6, ... , 2[r/2],

которая соответствует равносильной, вообще говоря, самопересекающейся биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на рисунке 5.

По законам неповторяемости и непротиводходности, вообще говоря, самопересекающейся биссектральной

ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на рисунке 5 она не может пройти более одного раза ни через одну из этих точек

0, 2, 4, 6, ... , 2[r/2].

Никаких иных точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на оси Ox° относительных абсцисс на рисунке 5 быть не может. А общее количество точек биссектральной ломаной на оси Ox° совпадает с общим количеством элементов имеющей

разность 2 конечной арифметической прогрессии

0, 2, 4, 6, ... , 2[r/2].

Поэтому все эти возможные точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH оказываются действительными, то есть наличествующими, причём непременно ровно по одному разу.

Тем самым доказано, что все точки биссектральной ломаной отражений в

прямоугольнике EFGH на его нижнем основании EH действительно расположены именно равномерно, а именно ровно через две единицы в системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат. Это в числе многого другого и показано на рисунках 7, 8 и 9.

Теперь предстоит доказать подобную равномерность уже для верхнего основания FG прямоугольника EFGH.

Общее количество точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на его верхнем основании FG y° = s в системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат на рисунке 5 проще всего определить по равносильной именно несамопересекающейся биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике $V_0W_0W_sV_s$ на рисунке 6.

Последовательность относительных абсцисс x° всех таких точек начинается с относительной высоты s прямоугольника. Далее следуют с промежутками 2s между относительными абсциссами x° соседних точек все остальные точки на отрезке длиной (rs - s). Поэтому наличествуют

$$[(rs - s)/(2s)] = [(r - 1)/2]$$

таких точек, следующих за точкой с относительной абсциссой x° = s, то есть вместе с этой точкой

$$[(r - 1)/2] + 1 = [(r + 1)/2]$$

точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на его верхнем основании FG y° = s в системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат на рисунке 5.

Теперь предстоит вновь поочерёдно рассмотреть все три допустимых сочетания чётности и нечётности относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) длины r и высоты s прямоугольника EFGH.

Если относительные длина r и высота s прямоугольника EFGH нечётны, то возможные значения относительных абсцисс x° лежащих на верхнем основании FG y° = s в

системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на рисунке 7 образуют конечную арифметическую прогрессию

1, 3, 5, ... , 2[r/2]-5, 2[r/2]-3, 2[r/2]-1, r = 2[r/2]+1

с такой же, как и на нижнем основании прямоугольника EFGH, разностью 2 и с [r/2] + 1 = [(r + 2)/2] = [(r + 1)/2] (последнее равенство

целых частей верно ввиду нечётности относительной длины r прямоугольника EFGH) элементов. То есть наличествуют ровно столько же элементов конечной арифметической прогрессии, сколько всех лежащих на верхнем основании FG точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH.

Если относительная длина r прямоугольника EFGH чётна, а его относительная высота s

нечётна, то возможные значения относительных абсцисс x° лежащих на верхнем основании FG y° = s в системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на рисунке 8 образуют конечную арифметическую прогрессию

1, 3, 5, ... , 2[r/2]-5, 2[r/2]-3, 2[r/2]-1

с такой же, как и на <u>нижнем</u> основании прямоугольника EFGH, разностью 2 и с [r/2] = [(r + 1)/2] (последнее равенство целых частей верно ввиду <u>чётности</u> <u>относительной</u> <u>длины</u> r прямоугольника EFGH) элементов. То есть наличествуют ровно столько же элементов <u>конечной</u> <u>арифметической</u> <u>прогрессии</u>, сколько всех лежащих на <u>верхнем</u> основании FG точек <u>биссектральной</u> ломаной отражений в прямоугольнике EFGH.

Если относительная длина r прямоугольника EFGH нечётна, а его относительная высота s чётна, то возможные значения относительных абсцисс x° лежащих на верхнем основании FG y° = s в системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на

рисунке 9 образуют конечную арифметическую прогрессию

0, 2, 4, 6, ... , 2[r/2]-6, 2[r/2]-4, 2[r/2]-2, 2[r/2]

с такой же, как и на нижнем основании прямоугольника EFGH, разностью 2 и с [r/2] + 1 = [(r + 2)/2] = [(r + 1)/2] (последнее равенство целых частей верно ввиду нечётности относительной длины r прямоугольника EFGH) элементов. То есть наличествуют ровно столько же элементов конечной

арифметической прогрессии, сколько всех лежащих на верхнем основании FG точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH.

Таким образом, во всех трёх допустимых сочетаниях чётности и нечётности относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) длины r и высоты s прямоугольника EFGH наличествуют ровно

столько же всех допустимых и возможных значений относительных абсцисс x° лежащих на верхнем основании FG y° = s в системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на рисунках 7, 8 и 9 как элементов имеющей разность 2 конечной арифметической прогрессии, сколько всех

лежащих на верхнем основании FG точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH.

По законам неповторяемости и непротивоходности, вообще говоря, самопересекающейся биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на рисунке 5 она не может пройти более одного раза ни через одну из этих лежащих на верхнем основании FG y° = s в

системе x°Oy° точек со всеми допустимыми и возможными значениями относительных абсцисс x°.

Никаких иных лежащих на верхнем основании FG y° = s в системе x°Oy° точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на рисунке 5 быть не может. А общее количество точек биссектральной ломаной на верхнем основании FG y° = s в системе x°Oy° совпадает

с общим количеством элементов соответствующей имеющей разность 2 конечной арифметической прогрессии всех допустимых и возможных значений относительных абсцисс x° всех этих точек.

Поэтому все эти допустимые и возможные точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на его верхнем основании FG оказываются действительными, то есть наличествующими, причём непременно ровно по одному разу.

Тем самым доказано, что все точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на его верхнем основании FG действительно расположены именно равномерно, а именно ровно через две единицы в системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат. Это в числе многого другого и показано на рисунках 7, 8 и 9.

Обе боковые стороны EF и HG прямоугольника EFGH не длиннее его оснований FG и EH. Кроме того, каждый отрезок биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике образует угол π/4 с каждой из сторон прямоугольника. Поэтому достаточно рассмотреть каждую из боковых сторон EF и HG прямоугольника EFGH совместно с имеющим такую же, как у неё, длину смежным отрезком любого из оснований FG и

EH и учесть равномерность всех точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике на этом отрезке. Отсюда следует точно такая же равномерность всех точек биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике на каждой из его боковых сторон.

Тем самым доказано, что все точки биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике EFGH на его боковых

сторонах EF и HG действительно расположены именно равномерно, а именно ровно через две единицы в системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат. Это в числе многого другого и показано на рисунках 7, 8 и 9.

Отсюда следует равномерность квадратной сетки, образуемой всеми самопересечениями

биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. Все квадраты этой решётки одинаковы и имеют равную двум диагональ в системе x°Oy° относительных (делённых на наибольшую общую делящую меру D{a, b} сторон прямоугольника) координат.

Стороны этих квадратов наклонены под углами π/4 к сторонам прямоугольника и имеют равные наибольшей общей делящей мере D{a, b} сторон a и b прямоугольника

проекции на стороны прямоугольника. Поэтому сторона каждого из квадратов этой сетки всех самопересечений равна $2^{1/2}D\{a, b\}$, а площадь каждого из этих квадратов составляет

$$2D^2\{a, b\}.$$

Общее количество этих квадратов можно определить по их общей площади.

Площадь прямоугольника составляет

$$ab = rsD^2\{a, b\}.$$

Из неё следует вычесть общую площадь равнобедренных прямоугольных треугольников вдоль контура прямоугольника с его внутренней стороны между контуром и равномерной сеткой квадратов. Площадь каждого из этих треугольников равна половине произведения стороны треугольника, лежащей на одной из сторон

прямоугольника, на высоту треугольника, опущенную на эту сторону треугольника.

Эта высота оказывается одинаковой для всех этих треугольников и составляет ровно половину диагонали каждого из внутренних квадратов, то есть D{a, b}. Периметр прямоугольника составляет

$$2(a + b).$$

Половина произведения периметра на эту общую высоту составляет

(a + b)D{a, b}.

Однако при этом площади двух треугольников с прямыми углами у двух вершин прямоугольника, через которые биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике не проходит, считаются дважды со смежных сторон прямоугольника и поэтому один раз должны быть вычтены из этой половины произведения.

Здесь используется доказанная сразу часть общей теоремы, относящаяся к тому, что биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике не может попасть в ту же самую вершину прямоугольника, откуда эта ломаная вышла.

Сумма площадей этих двух треугольников равна половине площади каждого из внутренних квадратов, то есть

$$\mathbf{D^2\{a, b\}.}$$

Поэтому общая площадь всех треугольников между контуром прямоугольника и сетью внутренних квадратов составляет

$$(a + b)D\{a, b\} - D^2\{a, b\} = (r + s)D^2\{a, b\} - D^2\{a, b\}.$$

В итоге общее количество квадратов внутри прямоугольника составляет

$$Q_g = \{rsD^2\{a, b\} - (r + s)D^2\{a, b\} + D^2\{a, b\}\}/(2D^2\{a, b\}) = (r - 1)(s - 1)/2.$$

Тем самым полностью завершены доказательство общей теоремы и построение теории конечных и бесконечных последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами.

3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ (НЕ)ПРЕРЫВНОСТИ ЗАДАЧ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЕ К ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ ОТРАЖЕНИЯМ БИССЕКТРИСЫ ВНУТРЕННЕГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНИКА ЕГО СТОРОНАМИ

Определение. Задачей называется предмет, в частности система, хотя бы некоторые части, элементы и/или взаимосвязи которых являются искомыми неизвестными.

Замечание. Это определение является всеобщим и охватывает также задачи на построение как поиск предметов, в том числе

примеров и контрпримеров, множеств, функций, уравнений и их совместных множеств, в классической математике часто называемых их системами, дополнительно изображаемых геометрических фигур, тел и их элементов.

Определение. Задача называется непрерывной при значении её данного, если все её искомые неизвестные являются непрерывными функциями этого данного задачи при этом его значении.

Определение. Задача называется непрерывной по её данному на множестве его значений, если все её искомые неизвестные являются непрерывными функциями этого данного задачи на этом множестве его значений.

Определение. Задача называется всюду непрерывной по её данному, если все её искомые неизвестные являются непрерывными функциями этого данного задачи при всевозможных его значениях.

Определение. Задача называется всюду непрерывной, если все её искомые неизвестные являются непрерывными функциями всех данных задачи при всевозможных сочетаниях любых значений всех этих данных.

Определение. Задача называется разрывной при значении её данного, если хотя бы одно её искомое неизвестное является разрывной функцией этого данного задачи при этом его значении.

Определение. Задача называется разрывной на множестве значений её данного, если при каждом значении этого её данного из этого множества его значений существует хотя бы одно её искомое неизвестное, являющееся разрывной функцией этого данного задачи при этом его значении.

Определение. Задача называется всюду разрывной по её данному, если при каждом значении этого её данного существует хотя бы одно её искомое неизвестное, являющееся разрывной функцией этого данного задачи при этом его значении.

Определение. Задача называется всюду разрывной, если при любом сочетании любых значений всех её данных существует хотя бы одно её искомое неизвестное, являющееся разрывной функцией всех данных задачи при этом сочетании значений всех её данных.

Теорема. Задача построения и измерения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике является всюду разрывной по его длине, по его высоте и по их отношению.

Доказательство.

Основная теорема доказала, в частности, следующее.

При соизмеримости обеих сторон прямоугольника (его длины и высоты), то

есть при рациональности отношения длины прямоугольника к его высоте, в задаче построения и измерения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике биссектральная ломаная конечна, то есть имеет конечное общее число частей, конечное общее число отрезков, конечную общую длину и всеми своими самопересечениями образует равномерную квадратную сетку с конечным общим количеством одинаковых квадратов.

При несоизмеримости обеих сторон прямоугольника (его длины и высоты), то есть при иррациональности отношения длины прямоугольника к его высоте, в задаче построения и измерения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике биссектральная ломаная бесконечна, то есть имеет бесконечное множество всех частей, бесконечное множество всех отрезков и бесконечную общую длину.

Кроме того, из <u>сколь</u> <u>угодно</u> <u>точной</u> <u>приближаемости</u> любого <u>иррационального</u> числ<u>а</u> <u>рациональными</u> числами, например <u>подходящими</u> <u>дробями</u> его <u>разложения</u> в <u>непрерывную</u> (<u>цепную</u>) <u>дробь</u> или <u>приближениями</u> в <u>любой</u> <u>позиционной</u> <u>системе</u> <u>счисления</u>, в частности <u>десятичными</u> или <u>двоичными</u>, следует при <u>несоизмеримости</u> <u>обеих</u> <u>сторон</u> прямоугольника (его длин<u>ы</u> и высот<u>ы</u>), то есть при <u>иррациональности</u>

отношения длины прямоугольника к его высоте, в задаче построения и измерения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике общепринятая «всюду плотность» в прямоугольнике биссектральной ломаной отражений в нём.

Определение. Вездесущностью (повсеместностью) множества A в множестве B называется всюду представленность (всюду наличие, всюду частота, общепринятая «всюду плотность») множества A в множестве B.

В любой сколь угодно малой окрестности любой длины прямоугольника при любой его высоте независимо от того, рационально или иррационально отношение длины к высоте прямоугольника, существует бесконечное множество как длин прямоугольника, отношения которых к его высоте рациональны, так и длин прямоугольника, отношения которых к его высоте иррациональны.

Поэтому задача построения и измерения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике является всюду разрывной по его длине.

В любой сколь угодно малой окрестности любой высоты прямоугольника при любой его длине независимо от того, рационально или иррационально отношение длины к высоте прямоугольника, существует бесконечное множество как высот прямоугольника,

отношения которых к его длине рациональны, так и высот прямоугольника, отношения которых к его длине иррациональны.

Поэтому задача построения и измерения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике является всюду разрывной по его высоте.

В любой сколь угодно малой окрестности любого отношения длины прямоугольника к его высоте независимо от того, рационально

или иррационально это отношение, существует бесконечное множество как рациональных, так и иррациональных таких отношений.

Поэтому задача построения и измерения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике является всюду разрывной по отношению длины прямоугольника к его высоте.

В итоге теорема доказана полностью.

4. МЕТАУРОВЕНЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (БЕС)КОНЕЧНОСТИ, (НЕ)РАЗРЕШИМОСТИ, РАССУДКА И РАЗУМА, ФИЛОСОФИИ И ПСИХОЛОГИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ И ОДНОНАПРАВЛЕННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ ОТРАЖЕНИЯМИ БИССЕКТРИСЫ ВНУТРЕННЕГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНИКА ЕГО СТОРОНАМИ

На метауровне конечность и бесконечность, всюду разрывная задача, разрешимость и неразрешимость, простота и сложность,

лёгкость и трудность, стандартность алгоритмического рассудка и открытия изобретательного разума, психология решения задачи вчувствованием, вдумыванием и вживанием в неё, а также однонаправленность математически моделируются теорией последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами на редкость наглядно и конкретно, то есть не только через абстрактное

мышление, но и через живое созерцание и, главное, через именно собственную деятельность построения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, оживляющую многие математические и прежде всего геометрические представления, задолго до появления восприимчивости к формальным определениям увлекающую даже маленьких детей и судьбоносно вовлекающую их в очаровательный мир математики как всеобщего языка жизни и науки.

Таковы разрешимость и неразрешимость задачи построения и измерения равномерной квадратной сетки, образуемой всеми самопересечениями непременно конечной биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике.

А именно, если отношение длины прямоугольника к его высоте рационально, то эта задача разрешима.

А если отношение длины прямоугольника к его высоте иррационально, то эта задача неразрешима.

Таковы простота и сложность предмета, в частности системы, а также лёгкость и трудность задачи построения и именно непосредственного, а не косвенного по выведенным и доказанным законам, измерения биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике.

А именно, если отношение длины прямоугольника к его высоте не только рационально, но ещё и целочисленно, то

биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике является на редкость простой, а задача её построения и именно непосредственного, а не косвенного по выведенным и доказанным законам, измерения оказывается на редкость простой и лёгкой.

Если рациональное отношение длины прямоугольника к его высоте выражается несократимой дробью с относительно

небольшим числителем, меньше которого её знаменатель, то биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике является простой, а задача её построения и именно непосредственного, а не косвенного по выведенным и доказанным законам, измерения оказывается простой и лёгкой.

Если рациональное отношение длины прямоугольника к его высоте выражается несократимой дробью с весьма большим

знаменателем, больше которого её числитель, то биссектральная ломаная отражений в прямоугольнике является весьма сложной, а задача её построения и именно непосредственного, а не косвенного по выведенным и доказанным законам, измерения оказывается весьма сложной и трудной, однако эта задача измерения сильно упрощается при переходе к косвенному измерению по выведенным и доказанным законам.

Стандартность алгоритмического рассудка математически моделируется задачей именно непосредственного, а не косвенного по выведенным и доказанным законам, измерения в теории последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами.

Открытия изобретательного разума математически моделируются задачей именно косвенного (по выведенным и доказанным законам) измерения в теории последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами, причём выводились эти законы на редкость наглядно и конкретно.

Психология решения задачи вчувствованием, вдумыванием и вживанием в неё математически моделируется ограничением рассмотрения внутренностью прямоугольника, сосредоточением внимания на ней и самим непосредственным ходом биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике в теории последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами на редкость наглядно и конкретно.

Однонаправленность биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике на метауровне математически моделирует:

1) прямолинейность, полное отсутствие гибкости и даже неповоротливость, пренебрежение обратной связью, невзирая на ход, промежуточные и окончательные итоги деятельности, догматизм, бессмысленное упрямство, битьё лбом о стенку, подмену цели, чрезвычайно вредные при решении многих жизненных и научных задач;

2) чрезвычайно полезные целеустремлённость, неуклонное следование судьбе и призванию, силу воли, постоянство, стойкость, устойчивость, прочность, надёжность, определённость, предсказуемость, наращиваемость, равное отношение ко многим, равносклонность, справедливость.

Задача о <u>биссектральной</u> ломаной отражений в прямоугольнике на <u>метамета</u>уровне чрезвычайно поучительна, учит основанной на чувстве меры мудрой разумности с критерием уверенного наилучшего выбора ни в коем случае не импульсивных сиюминутных эмоциональных своекорыстных, а посильно предельно глубоко продуманных и прочувствованных непременно общественно полезных именно долговременных решений.

Пример. В задаче о биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике ключевую роль играет соизмеримость сторон прямоугольника в смысле математической рациональности их отношения, равного отношению положительных целых чисел. А в жизни желанна и полезна жизненная соизмеримость и рациональность различных сторон жизни как разумность соотношений:

времён на занятия различными видами деятельности с учётом их желанности и полезности;

итогов деятельности и трудозатрат;

цен и полезности товаров.

Пример. В задаче о биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике создан и используется трёхуровневый иерархический анализ. С возможным изменением количества уровней он чрезвычайно полезен и в жизни для упорядочения текущего, долговременного и судьбоносного.

Пример. В задаче о биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике биссектриса наталкивается на ограничения его сторонами. Деятельность наталкивается на ограничения сторонами жизни.

Пример. В задаче о биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике они взаимосвязаны, закономерны, последовательны и соответствуют логике задачи и её решения. Хорошо, если жизненные решения и действия взаимосвязаны, закономерны, последовательны и соответствуют логике жизни и её сотворения.

Пример. В задаче о биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике каждому её отрезку свойственна прямизна как кратчайший путь к цели. Хорошо, если жизненные решения и действия являются именно целеустремлёнными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, введены наибольшие общие делящие и наименьшие общие кратные меры и многомерные кубы с обобщением наибольших общих делителей и наименьших общих кратных. На основе трёхуровневого иерархического анализа создана теория конечных и бесконечных последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами. Открыты

явления и доказанные теоремами законы конечной при соизмеримости и бесконечной при несоизмеримости сторон прямоугольника биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике, её конечной обратимости, неповторяемости, непротивоходности, невозвратимости и завершения в отличных от исходной вершинах прямоугольника, частичных, а при конечности биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и

полных её общего числа отрезков и общей длины вместе с единым размером и общим количеством квадратов равномерной сетки, образованной всеми самопересечениями биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике. В общей теории (не)прерывности задач доказаны всюду разрывность задачи о биссектральной ломаной отражений в прямоугольнике и её вездесущность (повсеместность, всюду

представленность, всюду наличие, всюду частота, общепринятая «всюду плотность») в нём в случае её бесконечности. Этой задачей на метауровне математически моделируются конечность и бесконечность, разрешимость и неразрешимость, простота и сложность, лёгкость и трудность, стандартность алгоритмического рассудка и открытия изобретательного разума, философия и психология решения задачи вчувствованием, вдумыванием и вживанием в неё, а также однонаправленность.

Теория конечных и бесконечных последовательных отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами основана на законах упругого соударения в механике и на законах отражения света в оптике

и поэтому может представить интерес для математики и физики с механикой и оптикой, а также для педагогики средней и высшей школы, в том числе для

специализированных классов, гимназий, лицеев, университетов, аспирантур, для предметных олимпиад и вообще для решения нестандартных задач, включая самостоятельное, в целях творческого развития будущих учёных.

Представляется весьма целесообразным дальнейшее развитие теории конечных и бесконечных последовательных

отражений биссектрисы внутреннего угла прямоугольника его сторонами, в частности применительно к другим типам многоугольников, криволинейным фигурам, многогранникам и пространственным телам произвольных форм, в том числе в математических пространствах произвольных размерностей.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. Энциклопедия элементарной математики в 5 книгах. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951–1966.

2. Альтшуллер Г. С. Алгоритм изобретения. М.: Московский рабочий, 1969. 272 с.

3. Альтшуллер Г. С. Как научиться изобретать. Тамбов: Тамбовское книжное изд-во, 1961. 128 с.

4. Альтшуллер Г. С. Основы изобретательства. Воронеж: Центрально-черноземное книжное издательство, 1964. 238 с.
5. Амосов Н. М. Искусственный разум. Киев: Наукова думка, 1969. 153 с.
6. Амосов Н. М. (ред.) Кибернетика и живой организм. Киев: Наукова думка, 1964. 117 с.
7. Амосов Н. М. Моделирование сложных систем. Киев: Наукова думка, 1968. 81 с.
8. Арбиб М. Мозг, машина и математика / пер. с англ. М.: Наука, 1968. 224 с.

9. Асмус В. Ф. Логика. М.: Государственное издательство политической литературы (ОГИЗ), 1947. 387 с.
10. Асмус В. Ф. Проблема интуиции в философии и математике (Очерк истории: XVII – начало XX в.). М.: Мысль, 1965. 312 с.
11. Асмус В. Ф. Учение логики о доказательстве и опровержении. М.: Государственное издательство политической литературы, 1954. 88 с.
12. Бакрадзе К. С. Логика. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та им. Сталина, 1951. 456 с.

13. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М.: Наука, 1969. 380 с.

14. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.

15. Берман Г. Н. Счёт и число. Как люди учились считать. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 36 с.

16. Берман Г. Н. Число и наука о нём. Общедоступные очерки по арифметике натуральных чисел. М.: Государственное

издательство технико-теоретической литературы, 1954. 164 с.

17. Боголюбов Н. Н. Мергелян С. Н. Советская математическая школа. М.: Знание, 1967. 65 с.

18. Борель Э. Вероятность и достоверность. М.: Наука, 1969. 110 с.

19. Ботвинник М. М. Алгоритм игры в шахматы. М.: Наука, 1968. 94 с.

20. Ботвинник М. М. О кибернетической цели игры. М.: Советская радио, 1955. 120 с.

21. Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1959. 178 с.

22. Бугулов Е. А., Толасов Б. А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам. Орджоникидзе: Северо-Осетинское книжное изд-во, 1962. 226 с.

23. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 292 с.
24. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с.
25. Винер Н. Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине. 2-е изд. М.: Советское радио, 1968. 201 с.
26. Винер Н. Я – математик. М.: Наука, 1964. 354 с.

27. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 180 с.

28. Виноградов С. Н., Кузьмин А. Ф. Логика. 8-е изд. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1954. 176 с.

29. Воробьёв Н. Н. Признаки делимости. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 72 с.

30. Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969. 112 с.

31. **Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Наука, 1967. 320 с.**
32. **Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1964. 872 с.**
33. **Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1966. 424 с.**
34. **Гагарин Ю. А., Лебедев В. И. Психология и космос. М.: Молодая гвардия, 1968. 208 с.**
35. **Галилей Г. Избранные труды: в 2 т. М.: Наука, 1964.**

36. **Гарднер М. Этот правый, левый мир. М.: Мир, 1967. 267 с.**
37. **Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел / перевод Б. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1959. 979 с.**
38. **Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе / пер. с англ. Б. И. Голубова. М.: Мир, 1967. 252 с.**

39. Генкин Л. О математической индукции. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 36 с.

40. Гильберт Д. Основания геометрии / перевод с седьмого немецкого издания И. С. Градштейна; под редакцией и со вступительной статьёй П. К. Рашевского. М.; Л.: ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 491 с.

41. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев: Изд-во АН УССР, 1964. 324 с.

42. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1946. 246 с.

43. Головина Л. И., Яглом И. М. Индукция в геометрии. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 100 с.

44. Горский Д. П. Вопросы абстракции и образование понятий. М.: Издательство Академии наук СССР, 1961. 352 с.

45. Горский Д. П. Логика. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1958. 292 с.

46. **Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 80 с.**
47. **Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, перераб. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 1100 с.**
48. **Гутчин И. Б. Кибернетические модели творчества. М.: Знание, 1969. 64 с.**

49. Декарт Р. Избранные произведения = Oeuvres choisies. М.: Государственное издательство политической литературы, 1950. 712 с.

50. Декарт Р. Рассуждение о методе. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1953. 655 с. (Серия: Классики науки).

51. Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. 2-е изд., испр. М.: Просвещение, 1965. 416 с.

52. Депман И. Я. Рассказы о математике. Л.: Детгиз, 1957. 142 с.

53. Депман И. Я. Рассказы о решении задач. Л.: Детская литература, 1957. 127 с.

54. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 267 с.

55. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Краткое пособие по математике для поступающих в Московский университет. М.: изд-во МГУ, 1964. 209 с.

56. Дринфельд Г. И. Дополнения к общему курсу математического анализа. Харьков: Изд-во

Харьковского государственного университета им. А. М. Горького, 1958. 115 с.

57. Дринфельд Г. И. Трансцендентность чисел пи и е. Харьков: Изд-во Харьковского государственного университета им. А. М. Горького, 1952. 76 с.

58. Дубнов Я. С. Измерение отрезков. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 100 с.

59. Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 72 с.

60. Збірник задач республіканських математичних олімпіад / В. І. Михайловський, М. Й. Ядренко, Г. Й. Призва, В. А. Вишенський; за заг. ред. доц. В. І. Михайловського. К.: Вища школа, 1969. 120 с.

61. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 560 с.

62. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967. 648 с.

63. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. М.: Наука, 1969. 32 с.

64. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. 5-е изд. М.; Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 708 с.

65. Катлер Э., Мак-Шейн Р. Система быстрого счёта по Трахтенбергу. М.: Просвещение, 1967. 134 с.

66. Клини С. Введение в метаматематику. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 526 с.

67. Кобринский Н. Е., Пекелис В. Д. Быстрее мысли. М.: Молодая гвардия, 1963. 475 с.

68. Колмогоров А. Н. О профессии математика. М.: МГУ, 1959. 30 с.

69. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

70. Кольман Э. Я. История математики в древности. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 235 с.

71. Кольман Э., Зих О. Занимательная логика. М.: Наука, 1966. 128 с.
72. Кондаков Н. И. Введение в логику. М.: Наука, 1967. 467 с.
73. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 576 с.
74. Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 160 с.

75. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

76. Крайзмер Л. П. Техническая кибернетика. М.; Л. Государственное энергетическое издательство, 1958. 82 с.

77. Кречмар В. А. Задачник по алгебре. М.: Наука, 1964. 388 с.

78. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968. 432 с.

79. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов / перевод с английского под редакцией А. Н. Колмогорова. М.: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1947. 664 с.

80. Курош А. Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней. М.; Л.: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1961. 32 с.

81. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / пер. с англ. И. Н. Веселовского. М.: Наука, 1967. 152 с.

82. Ланге В. Н. Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи. М.: Просвещение, 1967. 168 с.

83. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций / пер. и ред. проф. Н. К. Бари; доп. статьи акад. Н. Н. Лузина. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 325 с.

84. Лебег А. Об измерении величин. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1960. 204 с.
85. Лейтес Н. С. Об умственной одарённости. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1960. 216 с.
86. Литлвуд Дж. Математическая смесь / пер. с англ. Изд. 2, стереот. М.: Наука, 1965. 150 с.
87. Литцман В. Весёлое и занимательное о числах и фигурах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 264 с.

88. **Литцман В. Где ошибка? М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 192 с.**
89. **Литцман В. Старое и новое о круге. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 60 с.**
90. **Литцман В. Теорема Пифагора. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 116 с.**
91. **Маковельский А. О. История логики. М.: Наука, 1967. 504 с.**

92. Маркс К. Математические рукописи. М.: Наука, 1968. 640 с.

93. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965. 231 с.

94. Метельский Н. В. Очерки истории методики математики. Минск: Вышэйшая школа, 1968. 340 с.

95. Михеева А. В. и др. Словарь-минимум для чтения научной литературы на английском языке. М.: Наука, 1969. 138 с.

96. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII веке. М.: Государственное учебно-педагогическое

издательство Министерства просвещения РСФСР, 1953. 180 с.

97. Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1958. 168 с.

98. Начала Евклида. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949–1951.

99. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные / пер. с англ. В. В. Сазонова; под ред. И. М. Яглома. М.: Мир, 1966. 199 с.

100. Ньютон И. Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1948. 444 с. (Классики науки).

101. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / пер. с латин. с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова // А.

Н. Крылов. Собрание трудов. Т. VII. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1936. 696 с.

102. Ньютон И. Математические работы / пер. с лат., вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 478 с. (Классики естествознания).

103. Оре О. Графы и их применение. М.: Мир, 1965. 175 с.

104. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений / пер. с англ. Л. З. Румынского, Б. Л.

Румынского. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 383 с.

105. Пархоменко А. С. Что такое линия. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 140 с.

106. Перельман Я. И. Живая математика. М.: Наука, 1967. 160 с.

107. Перельман Я. И. Занимательная арифметика: загадки и диковинки в мире чисел. Изд. 9-е. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 190 с.

108. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 206 с.

109. Петер Р. Игра с бесконечностью / перевод с венгерского В. М. Боцу, А. Я. Маргулиса, А. Ш. Мейлихзона. М.: Просвещение, 1967. 272 с.

110. Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителя / пер. с англ. В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла; под ред. Ю. М. Гайдука. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. 208 с.

111. **Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения / пер. с англ.; под ред. С. А. Яновской. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 536 с.**
112. **Попов П. С. История логики Нового времени. М.: Издательство Московского университета, 1960. 254 с.**
113. **Постников М. М. Магические квадраты. М.: Наука, 1964. 84 с.**
114. **Преподавание математики: пособие для учителей / Ж. Пиаже, Э. Бет, Ж. Дьедонне, А.**

Лихнерович, Г. Шоке, К. Гаттеньо; перевод с французского А. И. Фетисова. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1960. 161 с.

115. Радемахер Г., Тёплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления / пер. с нем. В. И. Контова; под редакцией И. М. Яглома. 2-ое издание. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 264 с. (Серия «Библиотека математического кружка»).

116. Рыбников К. А. История математики. Т. 1. М.: Изд-во МГУ, 1960. 190 с.

117. Рыбников К. А. История математики. Т. 2. М.: Изд-во МГУ, 1963. 336 с.

118. Сборник задач московских математических олимпиад / сост. А. А. Леман; ред. В. Г. Болтянский. М.: Просвещение, 1965. 384 с.

119. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. М.: Просвещение, 1968. 168 с.

120. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах / перевод с польского И. Г. Мельникова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 88 с.

121. Серпинский В. О теории множеств / перевод с польского З. З. Рачинского. М.: Просвещение, 1966. 62 с.
122. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. 112 с.
123. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М.; Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 92 с.

124. **Соминский И. С. Метод математической индукции. М.: Наука, 1965. 58 с. Серия: Популярные лекции по математике.**

125. **Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. О математической индукции. М.: Наука, 1967. 144 с.**

126. **Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. Геометрия отображений отрезков, кривых, окружностей и кругов. М.: Мир, 1967. 224 с.**

127. **Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968. 231 с.**

128. Столяр А. А. Как мы рассуждаем? Минск: Нар. асвета, 1968. 112 с.
129. Столяр А. А. Логические проблемы преподавания математики. Минск: Вышэйшая школа, 1965. 254 с.
130. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 327 с.
131. Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 96 с.

132. Тьюринг А. М. Может ли машина мыслить / перевод с англ. Ю. А. Данилова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 67 с.

133. Уёмов А. И. Задачи и упражнения по логике. М.: Высшая школа, 1961. 355 с.

134. Уёмов А. И. Логические ошибки: как они мешают правильно мыслить. М.: Государственное издательство политической литературы, 1958. 120 с.

135. Улам С. Нерешённые математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.

136. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1966. 36 с.

137. Феликс Л. Элементарная математика в современном изложении. М.: Просвещение, 1967. 488 с.

138. Хаусдорф Ф. Теория множеств / перевод с немецкого Н. Б. Веденисова; под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. М.; Л.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 306 с.

139. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 112 с.

140. Хованский А. Н. Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 204 с.

141. Холл М. Комбинаторный анализ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 99 с.

142. Чистяков В. Д. Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями. Минск: Изд-во Мин. высшего, средн. спец. и проф. обр. БССР, 1962. 204 с.

143. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1963. 95 с.

144. Шаскольская М. П., Эльцин И. А. Сборник избранных задач по физике. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 208 с.

145. Швец М. Н. О приближённых числах. Киев: Радянська школа, 1968. 127 с.

146. Шилов Г. Е. Простая гамма. Устройство музыкальной шкалы. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 20 с.

147. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная (общая теория). М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1967. 220 с. Дарственная надпись: «Гелимсону Льву за успехи на IX Республиканской Олимпиаде юных

математиков. Председатель Жюри профессор Николай Алексеевич Давыдов. Ужгород, 30 марта 1969 года.» Занято третье место.

148. Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. Начальные понятия. М.: Наука, 1965. 376 с.

149. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1965. 455 с.

150. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. Геометрия (планиметрия). М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 380 с.

151. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 3. Геометрия (стереометрия). М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 267 с.

152. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 150 с.

153. Шустеф Ф. М., Фельдман А. М., Гуревич В. Ю. Сборник олимпиадных задач по математике. Минск, Учпедгиз БССР, 1962. 84 с.

154. Эйлер Л. Письма к учёным. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1963. 400 с.

155. Эшби У. Р. Введение в кибернетику. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 432 с.

156. Эшби У. Р. Конструкция мозга. Происхождение адаптивного поведения. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 399 с.

157. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 315 с.

158. Яглом И. М. Необыкновенная алгебра. М.: Наука, 1968. 72 с.

159. Яглом И. М., Яглом А. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Задачи по комбинаторике и теории вероятностей. Задачи из разных областей математики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 544 с.

CONTRIBUTOR'S PROFILE & ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Name	**Gelimson Lev Grigorevic, literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn**
Ф.И.О. (полностью)	**Гелимсон Лев Григорьевич, литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон**
Degree Current position	**Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering in the section "Physical and Mathematical Sciences" by the Highest Attestation Commission Classifier Director Director, Producer, Literary and Artistic Manager**
Учёная степень Должность	**доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии директор директор, продюсер и литературно-художественный руководитель**

Institutional affiliation	**Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany**
Место работы	**Академический институт создания всеобщих наук, Многоязычный литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия**
e-mail, эл. почта	**Leohi@mail.ru**
Postal address Почтовый адрес	**Ph. D. & Dr. Sc. Lev Gelimson, Westendstrasse 68, D-80339 Munich, Germany**
Science Index (SPIN)	**8046-6818**
Scopus ID	**6505889792**
Researcher ID	**R-5007-2016**
ORCID ID	**0000-0003-0627-84**