

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.  
Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 1/244

## **НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРОЧНОСТЬ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЛЛЮМИНАТОРОВ: диссертация ... кандидата технических наук: 01.02.06**

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson  
Академический институт создания всеобщих наук (Мюнхен)  
Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1986, 1987, 2022

## **НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРОЧНОСТЬ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЛЛЮМИНАТОРОВ: диссертация ... кандидата технических наук: 01.02.06**

Гелимсон Лев Григорьевич,  
доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору  
Высшей Аттестационной Комиссии,  
директор, Академический институт создания всеобщих наук, Мюнхен, Германия,  
E-mail: Leohi@mail.ru Web: [http://kekmir.ru/members/person\\_6149.html](http://kekmir.ru/members/person_6149.html)

Аннотация. Созданы и развиты основоположения математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых общих теорий и методов как теоретического фундамента для разработки теорий (с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов) и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов, при осесимметричном изгибе высокими давлениями.

Ключевые слова: математика, метрология, механика деформируемого твёрдого тела, теория упругости, функция напряжений Лява, существенно трёхмерное цилиндрическое тело, теория прочности, обобщение критерия наибольших сдвиговых напряжений и критерия удельной энергии формоизменения, разрушение, оптика, расфокусировка, формула Ламе.

УДК 539.3, 539.4, 539.5

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1986, 1987, 2022

## **STRESS-STRAIN STATE AND STRENGTH OF LIGHT- TRANSPARENT PORTHOLE ELEMENTS: Ph. D. Dissertation in Engineering: 01.02.06**

Gelimson Lev Grigorevic,  
Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering  
in the section "Physical and Mathematical Sciences"  
by the Highest Attestation Commission Classifier,  
Director, Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany,  
E-mail: Leohi@mail.ru Web: [http://kekmir.ru/members/person\\_6149.html](http://kekmir.ru/members/person_6149.html)

Abstract. The fundamentals of the mathematical, metrological, optical-mechanical and strength systems of principally new general theories and methods have been created and developed as a theoretical foundation for creating theories (with the discovery and justification of systems of fundamentally new phenomena and laws) and simple closed general analytical methods of rational integrated engineering investigation, design and control of the systems of the stress-strain states,

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 2/244

strength and optical properties of essentially three-dimensional cylindrical bodies, in particular transparent elements, by axisymmetric bending under high pressures.

**Keywords:** mathematics, metrology, solid mechanics, elasticity theory, Love stress function, essentially three-dimensional cylindrical body, strength theory, generalization of the maximum shear stress criterion and of the maximum distortion energy criterion, fracture, optics, defocusing, Lamé formula. UDC 539.3, 539.4, 539.5

Publishing House of the All-World Academy of Sciences "Collegium", Munich, 1986, 1987, 2022

## **ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ (2022) НАСТОЯЩЕЙ КАНДИДАТСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ**

Второе издание (1987) настоящей кандидатской диссертации, представленное к её защите, было сокращено примерно вдвое по сравнению с первым изданием (1986), чтобы уменьшить объём до общепринятого для кандидатских диссертаций по разделу «Физико-математические науки» Классификатора Высшей Аттестационной Комиссии. Было резко сокращено всё изложенное в принадлежащей автору одной трети научной монографии [110] и в ряде статей автора.

В третьем издании (2022) настоящей кандидатской диссертации во многом восстанавливаются содержание и объём первого издания (1986).

**ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ**

**АКАДЕМИЯ НАУК УССР**

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПРОЧНОСТИ**

**ГЕЛИМСОН ЛЕВ ГРИГОРЬЕВИЧ**

**УДК 539.4 : 535.813 : 551.46.07**

**НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРОЧНОСТЬ  
СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЛЛЮМИНАТОРОВ**

**01.02.06 «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»**

**ДИССЕРТАЦИЯ на соискание учёной степени кандидата технических наук**

**Научный руководитель доктор технических наук, старший научный сотрудник**

**КОНСТАНТИН КУЗЬМИЧ АМЕЛЬЯНОВИЧ**

**Киев 1987**

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

**НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРОЧНОСТЬ**

**СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЛЛЮМИНАТОРОВ: диссертация ... кандидата**

|  |           |
|--|-----------|
| технических наук: 01.02.06.....  | 1         |
| <b>ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ И ЗАДАЧ, ВЫБОР МЕТОДОВ И СРЕДСТВ<br/>ИССЛЕДОВАНИЙ.....</b>  | <b>5</b>  |
| <b>1. АНАЛИЗ МЕТОДОВ КОНСТРУИРОВАНИЯ И РАСЧЁТА ИЛЛЮМИНАТОРОВ.....</b>  | <b>19</b> |
| 1.1. Типичные конструкции иллюминаторов.....   | 19        |
| 1.2. Оптико-механические свойства основных светопрозрачных материалов.....   | 25        |
| 1.3. Методы расчёта светопрозрачных элементов иллюминаторов с<br>плоскопараллельными основаниями по теории пластин, теории плит и<br>осесимметричной теории упругости.....   | 27        |
| 1.4. Выводы по главе 1.....  | 39        |
| <b>2. СОЗДАНИЕ ОБЩЕГО (ПОЛУ)СТЕПЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА<br/>МАКРОЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОБЩИХ ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ПРОЧНОСТИ И<br/>РАЗРУШЕНИЯ СПЛОШНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, В<br/>ЧАСТНОСТИ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....</b> | <b>40</b> |
| 2.1. Выбор и обоснование основных расчётных схем осесимметричного нагружения без<br>объёмных сил и кручения трёхмерных цилиндрических упругих тел, в частности<br>светопрозрачных элементов, в технике высоких давлений.....           | 40        |

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 3/244

|  |            |
|--|------------|
| 2.2. Общее степенное решение бигармонического уравнения и определение общей степенной бигармонической функции напряжений Лява для общего степенного решения общей осесимметричной задачи теории упругости без объёмных сил и кручения и для создания общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов.....   | 41         |
| 2.3. Определение общей степенной бигармонической безразмерной функции напряжений Лява для сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов.....   | 52         |
| 2.4. Определение общей полустепенной бигармонической безразмерной функции напряжений Лява для кольцевых трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов.....  | 53         |
| 2.5. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, жёстко защемлённого по краю, теория и среднеквадратичный, обеспечивающий минимакс модуля и коллокационный методы минимизации невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения.....   | 56         |
| 2.6. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание свободно опёртого по краю сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.....  | 64         |
| 2.7. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание опёртого по окружности меньшего радиуса сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.....  | 69         |
| 2.8. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при равномерном противодействии на кольцевую периферическую часть другого основания со свободной круглой центральной частью.....   | 75         |
| 2.9. Двухпараметрический метод минимизации невязки осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.....   | 81         |
| 2.10. Создание двухпараметрического и однопараметрического методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения, однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения, открытие и обоснование первых трёх основных явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания. 84 |            |
| 2.11. Выводы по главе 2.....   | 119        |
| <b>3. ПРОВЕРКА ДОСТОВЕРНОСТИ СОЗДАННОГО ОБЩЕГО (ПОЛУ)СТЕПЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА МАКРОЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОБЩИХ ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ СПЛОШНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, В ЧАСТНОСТИ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....</b>  | <b>120</b> |
| 3.1. Сравнение с известными аналитическими методами теории пластин и теории плит для методической, аналитической и численной проверки и оценки достоверности созданного общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов для общих теорий деформирования, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов.....  | 120        |
| 3.2. Численная конечно-элементная проверка достоверности созданного общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов для общих теорий деформирования, прочности и разрушения, открытие и обоснование четвёртых   |            |

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

|   |            |
|---|------------|
| Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 4/244<br>основных явления и закона напряжённно-деформированного состояния именно<br>существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности<br>светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное<br>основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания<br>.....  | 124        |
| 3.3. Экспериментальная проверка достоверности созданных общего (полу)степенного<br>метода и теорий деформирования, прочности и разрушения именно существенно<br>трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,<br>под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую<br>периферическую часть частично нагруженного основания.....  | 131        |
| 3.4. Выводы по главе 3.....   | 143        |
| <b>4. ПРИМЕНЕНИЕ СОЗДАННОГО ОБЩЕГО (ПОЛУ)СТЕПЕННОГО<br/>АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА МАКРОЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ОБЩИХ<br/>ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ЖЁСТКОСТИ, ОПТИКИ, ПРОЧНОСТИ И<br/>РАЗРУШЕНИЯ СПЛОШНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, В<br/>ЧАСТНОСТИ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЛЛЮМИНАТОРОВ ДЛЯ<br/>ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ.....</b>  | <b>144</b> |
| 4.1. Создание общих теорий жёсткости, прочности и разрушения сплошных<br>трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов<br>иллюминаторов для высоких давлений.....  | 144        |
| 4.2. Создание теории влияния на оптические свойства иллюминатора напряжённно-<br>деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного<br>цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными<br>давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую<br>часть частично нагруженного основания, открытие, обоснование и обобщение шести<br>основных явлений и законов такого напряжённно-деформированного состояния..... | 154        |
| 4.3. Метод и алгоритм комплексной оптимизации прочности, жёсткости и оптических<br>свойств именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в<br>частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью<br>нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного<br>основания.....   | 191        |
| 4.4. Создание общих теории и методов обобщения критериев предельных состояний и<br>прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений с<br>деформированием и/или движением (смещением, вращением) предельной поверхности<br>на случай анизотропии и различных сопротивлений материала растяжению и сжатию<br>для исследований прочности органического стекла при сложном напряжённном<br>состоянии.....  | 195        |
| 4.5. Открытие системы принципиальных изъянов абсолютной и относительной<br>погрешностей и метода наименьших квадратов и создание теорий всеобщей<br>погрешности, псевдорешений и взвешивания данных с итерационным общим методом<br>наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, для исследования<br>прочности неорганического стекла при повторно-статическом нагружении.....  | 207        |
| 4.6. Обоснования защищённых авторскими свидетельствами на изобретения<br>предложенных новых конструкций иллюминаторов для высоких давлений по<br>созданным общим теориям деформирования, жёсткости, оптики, прочности и<br>разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных<br>элементов.....   | 225        |
| 4.7. Выводы по главе 4.....   | 228        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ.....</b>  | <b>230</b> |
| <b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ СО ССЫЛКАМИ В ТЕКСТЕ.....</b>   | <b>234</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</b>  | <b>242</b> |

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 5/244

## **ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ И ЗАДАЧ, ВЫБОР МЕТОДОВ И СРЕДСТВ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Подъём народного хозяйства на принципиально новый научно-технический уровень и его перевод на рельсы интенсивного развития настоятельно требуют всё более полного освоения практически неисчерпаемых богатств Мирового океана.

В «Основных направлениях экономического и социального развития СССР на 1986-1990 годы и на период до 2000 года» одной из главных задач в области естественных и технических наук названо комплексное исследование Мирового океана, требующее создания и внедрения новых технических средств различного назначения.

Одним из эффективных методов поиска и разведки полезных ископаемых в Мировом океане является фотокинотелевизионная съёмка.

Съёмочная аппаратура устанавливается в подводных аппаратах, включающих иллюминаторы для высоких давлений со светопрозрачными элементами из органического или неорганического стекла. В состав подводных оптических систем входят гидрообъективы, которые исправляют оптические искажения изображений подводных объектов, связанные с переходами световых лучей через границы раздела сред с различными показателями преломления. В целях универсализации гидрообъективов, упрощения изготовления светопрозрачных элементов, монтажа и юстировки подводных оптических систем границы раздела воздушной среды внутри аппарата, светопрозрачного элемента и гидросферы должны быть плоскопараллельными. Под действием высоких давлений океанских глубин первоначально плоские оптические поверхности светопрозрачного элемента иллюминатора существенно деформируются, что обуславливает дополнительные искажения, которые не исправляются гидрообъективом. Некоторое уменьшение деформаций светопрозрачного элемента достигается путём использования неорганического стекла взамен органического стекла. Специфике конструктивно-технологических свойств неорганического стекла наилучшим образом соответствует простейшая форма светопрозрачного элемента в виде сплошного прямого кругового цилиндра с плоскопараллельными основаниями.

Однако прогибы оптических поверхностей светопрозрачных элементов из неорганического стекла под действием высоких давлений океанских глубин более чем на порядок превышают значения, влиянием которых на качество изображения можно было бы пренебречь.

Поэтому для проектирования иллюминаторов как неотъемлемых составных частей предназначенных для высоких давлений оптических систем, удовлетворяющих высоким требованиям к качеству изображения, необходимо достоверно знать напряжённо-деформированные состояния светопрозрачных элементов из стекла и учитывать влияние этих состояний на прочность и оптические свойства иллюминаторов.

Из теории оптических систем известно, что зависимости между оптическими искажениями и конструктивными параметрами элементов системы должны быть выражены непременно аналитически. Однако применяемые в настоящее время при проектировании оптических иллюминаторов для высоких давлений аналитические методы теории пластин и теории плит не учитывают большой относительной толщины светопрозрачных элементов иллюминаторов и не могут с необходимой точностью и достоверностью характеризовать действительное напряжённо-деформированное состояние таких иллюминаторов.

Проблемы проектирования таких иллюминаторов и иллюминаторов, применяемых в химической промышленности, в физико-химических экспериментах и в других отраслях техники высоких давлений, имеют много общего.

Поэтому является актуальным создание простых замкнутых аналитических методов расчёта напряжённо-деформированных состояний светопрозрачных элементов как существенно трёхмерных тел и учёта влияния этих состояний на прочность и оптические свойства иллюминаторов для высоких давлений.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 6/244

Тем более необходимо и полезно создание математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых основополагающих общих теорий и методов как теоретического фундамента для разработки теорий и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, прочности и оптических свойств осесимметрично изгибаемых высокими давлениями именно существенно трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов. Научные исследования в этом направлении относятся к проблемам динамики, прочности машин, приборов и аппаратуры.

Эта кандидатская диссертация обобщает результаты научно-исследовательских работ, выполненных во ВНИИкомпрессормаш (1974–1981 гг., причём в лаборатории прочности конструкций, работающих под давлением, среди других использовался гидрокомпрессор на давления до 1600 МПа, что примерно в 15 раз превышает давление на дне Марианской впадины, глубочайшей в Мировом океане) и в Сумском филиале Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина (1981–1987 гг.) единолично автором (теоретические исследования с тринадцатилетним безаварийным опытом собственных аналитических методов расчёта на прочность многих сотен конструкций в технике высоких давлений и обработка экспериментальных данных) и при его личном участии (замысел и осуществление экспериментальных исследований) в качестве ответственного исполнителя хоздоговорных и госбюджетных тем, в том числе темы 1.10.2.11-63 «Исследование прочности конструкций из силикатных материалов при внешнем гидростатическом давлении» Института проблем прочности АН УССР, утверждённой Постановлением № 474 Президиума АН Украины от 27.12.1985 г., и включённой в Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 11.12.1982 г. хоздоговорной темы 06.05.03.81-85 «Экспериментально-теоретические исследования, разработка и изготовление глубоководных боксов и стендов высокого давления для оптико-механических испытаний» Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина и НИПИОкеангеофизика ПО «Южморгеология» (г. Геленджик), номер государственной регистрации 0181.3005099, инвентарный номер ВНТИцентр 0286.0001034, в рамках целевой комплексной программы ГКНТ 074.01 «Мировой океан» и утверждённого АН УССР научного направления Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина «Оптико-механические проблемы в современной глубоководной технике».

Цель настоящей кандидатской диссертации – создание, основоположение и практически целесообразное идейное развитие математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых общих теорий и методов как теоретического фундамента теорий и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, прочности и оптики осесимметрично изгибаемых высокими давлениями именно существенно трёхмерных цилиндрических тел (светопрозрачных элементов), в частности при защемлении края, опирании по краю или по окружности меньшего радиуса или при периферическом противодействии с возможным боковым давлением.

Основные задачи данной кандидатской диссертации, вытекающие из этой цели:

1. Создание математической системы принципиально новых общих теорий и методов. Это в том числе

1.1) теория общих математических задач как множеств функциональных отношений (в частности уравнений и/или неравенств) с известными операторами над искомыми функциями известных аргументов;

1.2) теория собственной совокупности видов (классов), в том числе собственного вида (класса), функций для множества операторов с глубокими обобщениями неподвижной точки отображения и собственной функции для оператора;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 7/244

1.3) использующий линейную независимость степенных функций, в частности для обобщения полиномиальных методов, общий (полу)степенной метод с решениями в (полу)степенных рядах, в том числе общего решения бигармонического уравнения в классах (полу)степенных рядов как собственных классов функций для принимающего значения в тех же классах оператора этого уравнения с глубокими и очень полезными обобщениями неподвижной точки отображения и собственной функции для оператора, так что образ не обязан быть равным и даже пропорциональным прообразу, в частности применительно к осесимметричной функции напряжений Лява и к общему (полу)степенному аналитическому методу макроэлементов для именно существенно трёхмерных тел;

1.4) теория именно дополнительного альтернативного возведения в степень (минус-остепенения) умножением функции знака основания на степень модуля основания с лишь итоговым учётом отрицательности основания для обобщений степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания, в частности для начальных, центральных и смещённых моментов любых нецелых порядков и для обобщений общего (полу)степенного метода.

2. Создание метрологической системы принципиально новых общих теорий и методов. Среди них общие теории и методы наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре именно на лучшие из них и при взвешенном учёте непременно всех данных без исключения выбросов, в частности применительно к совершенствованию методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности при высоких давлениях. В том числе:

2.1) общая теория анализа приемлемости методов обработки данных с открытыми и доказанными принципиальными изъянами абсолютной и относительной погрешностей и якобы незаменимого классического метода наименьших квадратов Гаусса и Лежандра, причём вне крайне узких областей приемлемости (пригодности) возможны нелогичность, неоднозначность, неопределённость, неинвариантность, даже извращения действительности;

2.2) общие теории произвольных неточных псевдорешений, их наилучших квазирешений и всеобщей погрешности как инвариантной меры неточности, обобщающей нечёткую приближённость, с оценкой их и меры несовместности противоречивых предметов, в частности переопределённых систем уравнений, в том числе в задаче обработки данных, и с общими методами аналитического приближения к квазирешению, обобщающему точное решение, могущее не существовать или невозможное в противоречивой задаче;

2.3) теория и общие методы нормального взвешивания данных с разбросом безотносительно нормальности распределения данных для опоры именно на лучшие из них при учёте непременно всех данных без исключения выбросов и при возможности именно правильного использования формул аналитически простейшего метода наименьших квадратов с его нелогичными произвольным выбрасыванием наихудших данных и действительной опорой на самые худшие из сохраняемых данных ввиду ничтожности вклада наилучших данных в сумму квадратов отклонений, минимизируемую этим методом.

3. Создание оптико-механической системы принципиально новых общих теорий и методов. Среди них –

3.1) общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики нагруженных именно существенно трёхмерных тел;

3.2) теория многовариантности минимизации невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения, осуществляемой среднеквадратичным, обеспечивающим минимум модуля и коллокационным методами;

3.3) теория и аналитические методы устранения минимизированных невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 8/244

3.4) теории осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного и кольцевого существенно трёхмерных цилиндрических тел при защемлении края, опирании по краю или по окружности меньшего радиуса или при периферическом противодействии;

3.5) теория влияния осесимметричного изгиба равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, на его оптические свойства.

4. Создание прочностной системы принципиально новых общих теорий и методов. Это в том числе

4.1) общая теория и общие методы обобщения критериев предельных состояний и критериев прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности, на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию;

4.2) общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции;

4.3) обобщение для любого изотропного материала, именно различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска и четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, приемлемых только для изотропного материала, непременно одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, в том числе применительно к предельной поверхности органического стекла;

4.4) необходимое для определения опаснейшей точки преобразование первой теории прочности (критерия наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе к виду с равносильным (эквивалентным) и с единым предельным напряжениями;

4.5) именно общее решение задачи прочности существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на одно основание, на кольцевую периферическую часть другого основания и на боковую поверхность;

4.6) метод именно общего определения такого переходного значения отношения давления на боковую поверхность существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность к давлению на полностью нагруженное основание, что при превышении этого переходного значения место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в теле скачком переходит из центра на край ненагруженной центральной части частично нагруженного основания, соответственно принципиально изменяется характер разрушения, так что вместо радиального растрескивания всего тела из неорганического стекла происходят скалывание сегмента у ненагруженной центральной части частично нагруженного основания и последующее растрескивание этого сегмента;

4.7) метод именно общего определения такого наилучшего значения отношения давления на боковую поверхность существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность к давлению на полностью нагруженное основание, что при этом наилучшем значении достигаются минимум равносильного (эквивалентного) напряжения в теле и наибольшее разрушающее давление на полностью нагруженное основание;



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 9/244

4.8) методология построения простых замкнутых именно общих аналитических методов решения задач механики и прочности для существенно трёхмерных осесимметричных упругих тел;

4.9) методология построения простых замкнутых аналитических методов решения именно типов задач механики и прочности для существенно трёхмерных осесимметричных упругих тел;

4.10) методология построения именно замкнутого аналитического решения каждой реальной задачи механики и прочности, сочетающего инженерную точность с простотой, соответствующей мере сложности граничных условий задачи;

4.11) методология функционально допустимого и технологически осуществимого рационального управления прочностью и другими характеристиками каждой реальной конструкции.

5. Создание методологии открытия и обоснования механической, прочностной и оптической систем принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерных тел, а также системы принципиально новых всеобщих явлений и законов приложением созданных математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем общих теорий и методов к впервые замкнуто аналитически решаемым нетривиальным задачам механики, прочности и оптики именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность с открытием, обоснованием и обобщением системы принципиально новых явлений и законов деформирования, оптики и разрушения такого тела и с уточнением, развитием, обобщением и полезным дополнением классических и других известных аналитических методов определения напряжённо-деформированного состояния такого тела из пластичного или хрупкого конструкционного материала при высоких давлениях.

6. Создание методологии проверки пригодности математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем созданных общих теорий и методов – внутренней проверки их многовариантностью с возможностью самопроверяемости и взаимной проверяемости и внешней проверки путём аналитических и численных сопоставлений полученных формул и численных результатов с формулами и численными результатами классических и других известных аналитических решений, численными и приемлемо обработанными экспериментальными данными.

7. Создание теории рационального комплексного управления напряжённо-деформированным состоянием, прочностью и оптическими свойствами именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность тела.

8. Создание и внедрение принципиально новых методов рационального комплексного проектирования (с учётом открытых явлений и законов) и эффективных конструкций иллюминаторов для высокого давления, в том числе защищённых авторскими свидетельствами на изобретения.

Главные выдвинутые и осуществлённые идеи настоящей кандидатской диссертации:

1. Математическая система принципиально новых общих идей. Это в том числе

1.1) идея общих математических задач как множеств функциональных отношений (в частности уравнений и/или неравенств) с известными операторами над искомыми функциями известных аргументов;

1.2) идея собственной совокупности видов (классов), в том числе собственного вида (класса), функций для множества операторов с глубокими обобщениями неподвижной точки отображения и собственной функции для оператора;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 10/244

1.3) идеи использования линейной независимости степенных функций, в частности для обобщения полиномиальных методов общим (полу)степенным методом с решениями в (полу)степенных рядах, в том числе общего (полу)степенного решения бигармонического уравнения в классах (полу)степенных рядов как собственных классах функций для принимающего значения в тех же классах оператора этого уравнения с глубокими и очень полезными обобщениями неподвижной точки отображения и собственной функции для оператора, так что образ не обязан быть равным и даже пропорциональным прообразу, в частности применительно к функциям напряжений и к общему (полу)степенному аналитическому методу макроэлементов для именно существенно трёхмерных тел;

1.4) идея именно дополнительного альтернативного возведения в степень (минус-остепенения) умножением функции знака основания на степень модуля основания с лишь итоговым учётом отрицательности основания для обобщений степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания, в частности для начальных, центральных и смещённых моментов любых нецелых порядков и для обобщений общего (полу)степенного метода.

2. Метрологическая система принципиально новых общих идей. Среди них – идеи общих теорий и методов наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре именно на лучшие из них и при взвешенном учёте непременно всех данных без исключения выбросов, в частности применительно к совершенствованию методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности при высоких давлениях. Это в том числе

2.1) идеи анализа приемлемости, логичности, однозначности, определённости, инвариантности и соответствия действительности таких классических методов обработки данных, как абсолютная и относительная погрешности и метод наименьших квадратов Гаусса и Лежандра;

2.2) идеи произвольных неточных псевдорешений, их наилучших квазирешений и всеобщей погрешности как инвариантной меры неточности, обобщающей нечёткую приближённость, с оценкой их и меры несовместности противоречивых предметов, в частности переопределённых систем уравнений, в том числе в задаче обработки данных, и с общими методами аналитического приближения к квазирешению, обобщающему точное решение, могущее не существовать или невозможное в противоречивой задаче;

2.3) идея нормального взвешивания данных с разбросом безотносительно нормальности распределения данных для опоры именно на лучшие из них при учёте непременно всех данных без исключения выбросов и при возможности именно правильного использования формул аналитически простейшего метода наименьших квадратов с его нелогичными произвольным выбрасыванием наихудших данных и действительной опорой на самые худшие из сохраняемых данных ввиду ничтожности вклада наилучших данных в сумму квадратов отклонений, минимизируемую этим методом.

3. Оптико-механическая система принципиально новых общих идей. Среди них –

3.1) идея приложения общего (полу)степенного метода к созданию общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики нагруженных именно существенно трёхмерных тел;

3.2) идея многовариантности минимизации невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения, осуществляемой среднеквадратичным, обеспечивающим минимакс модуля и коллокационным методами;

3.3) идея устранения минимизированных невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 11/244

3.4) идеи осуществимого плоско точного неплоско приближённого выполнения граничных условий при осесимметричном изгибе равномерным давлением на одно основание сплошного и кольцевого существенно трёхмерных цилиндрических тел при различных условиях уравнивания;

3.5) идея дополнения стрелы прогиба как интегральной характеристики жёсткости искривлением как локальной характеристикой оптики и прочности;

3.6) идея кратного снижения максимума рабочей расфокусировки изображений подводных объектов, единственно существенной при осесимметричном изгибе равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, такой предварительной расфокусировкой оптической системы, которая противоположна средней рабочей расфокусировке.

4. Прочностная система принципиально новых общих идей. Это в том числе

4.1) идеи обобщения критериев предельных состояний и прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности, на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию;

4.2) идея обобщения критериев предельных состояний и критериев прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции;

4.3) идеи обобщения для любого изотропного материала, именно различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска и четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, приемлемых только для изотропного материала, непременно одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, в том числе применительно к предельной поверхности органического стекла;

4.4) идея необходимого для определения опаснейшей точки преобразования первой теории прочности (критерия наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе к виду с равносильным (эквивалентным) и с единым предельным напряжениями;

4.5) идея именно общего решения задачи прочности существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на одно основание, на кольцевую периферическую часть другого основания и на боковую поверхность;

4.6) идея именно общего метода определения такого переходного значения отношения давления на боковую поверхность существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность к давлению на полностью нагруженное основание, что при превышении этого переходного значения место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в теле скачком переходит из центра на край ненагруженной центральной части частично нагруженного основания, соответственно принципиально изменяется характер разрушения, так что вместо радиального растрескивания всего тела из неорганического стекла происходят скалывание сегмента у ненагруженной центральной части частично нагруженного основания и последующее растрескивание этого сегмента;

4.7) идея именно общего метода определения такого наилучшего значения отношения давления на боковую поверхность существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность к давлению на полностью нагруженное основание, что при этом наилучшем значении

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 12/244

достигаются минимум равносильного (эквивалентного) напряжения в теле и наибольшее разрушающее давление на полностью нагруженное основание;

4.8) идея существования именно общих аналитических методов решения задач механики и прочности для существенно трёхмерных осесимметричных упругих тел;

4.9) идея существования аналитических методов решения именно типов задач механики и прочности для существенно трёхмерных осесимметричных упругих тел;

4.10) идея существования аналитического решения каждой реальной задачи механики и прочности, сочетающего инженерную точность с простотой, соответствующей мере сложности граничных условий задачи;

4.11) идея существования функционально допустимого и технологически осуществимого рационального управления прочностью и другими характеристиками каждой реальной конструкции.

5. Идеи существования механической, прочностной и оптической систем принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерных тел и системы принципиально новых всеобщих явлений и законов, а также идеи оценивания, уточнения, развития, обобщения и полезного дополнения классических и других известных аналитических методов.

6. Идея именно систематичности проверки пригодности математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем созданных общих теорий и методов – внутренней проверки их многовариантностью с возможностью самопроверяемости и взаимной проверяемости и внешней проверки путём аналитических и численных сопоставлений полученных формул и численных результатов с формулами и численными результатами классических и других известных аналитических решений, численными и приемлемо обработанными экспериментальными данными.

7. Идея практической независимости оптических свойств от важнейшего для прочности давления на боковую поверхность осесимметрично изгибаемого равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, для простоты осуществимости рационального управления напряжённо-деформированным состоянием, прочностью и оптическими свойствами такого тела.

8. Идеи устранения силовых контактов и растягивающих напряжений осесимметрично изгибаемого равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла, для создания и внедрения принципиально новых методов рационального комплексного проектирования (с учётом открытых явлений и законов) и эффективных конструкций иллюминаторов для высокого давления.

Научная новизна настоящей кандидатской диссертации состоит в следующем:

созданы и развиты математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий и методов как теоретический фундамент для создания теорий (с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов) и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, прочности и оптических свойств осесимметрично изгибаемых высокими давлениями именно существенно трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов, в том числе под равномерными давлениями на одно основание, на кольцевую периферическую часть другого основания и на боковую поверхность;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 13/244

создана теория общих математических задач как множеств функциональных отношений (например функциональных уравнений или неравенств) между известными операторами над искомыми функциями известных аргументов;

создана теория собственной совокупности видов (классов), в частности собственного вида (класса), функций для множества операторов (обобщение собственной функции оператора);

создан общий (полу)степенной метод, впервые давший и для функций напряжений общее решение бигармонического уравнения в (полу)степенных рядах как собственных классах функций для оператора этого уравнения, и открыто явление ограничения не только снизу, но и сверху степени функции напряжений граничными условиями задачи;

введено альтернативное возведение в степень (минус-остепенение) умножением функции направления (знака) основания на степень модуля основания с лишь итоговым учётом отрицательности основания для обобщений степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания, в частности для начальных, центральных и смещённых моментов любых нецелых порядков и для обобщений общего (полу)степенного метода;

созданы общие теории неточных псевдорешений, их наилучших квазирешений, всеобщей погрешности как инвариантной меры неточности, обобщающей нечёткую приближённость, с оценкой их и меры несовместности противоречивой задачи и с общими методами аналитического приближения к квазирешению, обобщающему точное решение, могущее не существовать или невозможное в противоречивой задаче, в т. ч. в задаче обработки данных;

созданы общие теории и методы наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре на лучшие из них и взвешенном учёте всех данных без исключения выбросов, в том числе для методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности конструкций при высоких давлениях, в частности: общая теория анализа приемлемости методов обработки данных (доказаны крайняя узость областей пригодности абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов, их принципиальные изъяны и пороки вплоть до нелогичности, неопределённости, неинвариантности, двусмысленности, субъективизма исключения выбросов, опоры на худшие сохраняемые данные ввиду ничтожности вклада наилучших данных в сумму квадратов отклонений, минимизируемую этим методом, и даже извращений действительности); теория и общие методы нормального взвешивания всех данных безотносительно нормальности их распределения для опоры непременно на лучшие из них при учёте всех данных без исключения выбросов и при правильном использовании формул аналитически простейшего классического метода наименьших квадратов;

создан общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики именно существенно трёхмерных тел;

созданы теории и аналитические методы среднеквадратичной, обеспечивающей минимум модуля и коллокационной минимизации и устранения минимизированных невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения;

созданы общая теория и общие методы обобщения критериев предельных состояний и прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений и добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию и выдвинуты обобщения третьей и четвёртой теорий прочности для любого изотропного материала;

созданы теории и аналитические методы решения задач о напряжённо-деформированном состоянии при осесимметричном изгибе линейно упругого трёхмерного сплошного цилиндрического тела равномерным давлением на одно основание с возможным равномерным давлением на боковую поверхность при жёстком закреплении боковой поверхности, свободном опирании по краю или по окружности меньшего радиуса или при

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 14/244

равномерном противодействии на кольцевую периферическую часть другого основания со свободной круглой центральной частью;

создана теория влияния осесимметричного изгиба равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания со свободной круглой центральной частью существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента, на его оптические свойства;

создана теория с методом и алгоритмом комплексной оптимизации системы механических, прочностных и оптических свойств существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений;

открыты и обоснованы системы принципиально новых явлений и законов деформирования и оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений, при осесимметричном изгибе равномерными давлениями с возможным боковым давлением и всеобщих явлений и законов;

обобщены и значительно уточнены общим (полу)степенным методом расчёты именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений, по сравнению с расчётами по теории пластин и по теории плит;

обоснована достоверность созданных общих теорий и аналитических методов исследований напряжённно-деформированных состояний, жёсткости и оптики, прочности и разрушения трёхмерных сплошных цилиндрических тел аналитическим и численным сопоставлением с известными аналитическими методами и сравнением результатов использования созданных и классических и других известных аналитических, численных и экспериментальных методов; предложены и обоснованы новые рациональные конструкции иллюминаторов для высоких давлений, в том числе защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

Обоснованность настоящей кандидатской диссертации обеспечивается опорой её теорий и методов на общепринятые допущения, теории и методы математики, метрологии, механики деформируемого твёрдого тела (с теорией упругости, теорией пластин и теорией плит) и прочности, теорию оптических систем, сопоставлениями многовариантных формул и результатов между собой и с классическими и другими известными формулами, численными и экспериментальными данными.

Создание в настоящей кандидатской диссертации принципиально новых общих теорий и методов основывается на общепринятых общенаучных эмпирических и теоретических методах, а также на следующих всеобщих методах познания.

Логика с её законами и принципами используется повсеместно, в том числе закон тождества, закон противоречия, закон исключённого третьего и принцип достаточного основания.

Примерами применения закона противоречия и закона исключённого третьего являются доказательства ограниченности сверху степени бигармонической функции напряжений Лява методом от противоречащего.

Диалектика и её законы иллюстрируются новыми примерами их выражений.

Закон единства и борьбы противоположностей проявляется в алгебраическом суммировании слагаемых противоположных знаков, в частности в продольной расфокусировке изображений подводных объектов с противоположными знаками вкладов в неё искривлений первоначально плоскопараллельных оптических поверхностей именно существенно трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента при его деформировании высоким давлением.

Более того, многовариантность однопараметрического и двухпараметрического методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения и методов минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной приводит к обобщению закона единства и борьбы противоположностей законом единства и полезной дополнительности различных предметов, которые только в частном случае могут

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 15/244

составлять именно пару противоположностей и вовсе не обязаны бороться между собой, а могут полезно и даже гармонично дополнять друг друга, в данном случае обеспечивать самопроверяемость и взаимную проверяемость итогов и тем самым повышать их точность и надёжность.

Закон перехода количественных изменений в качественные изменения проявляется в доказательстве наличия переходного значения отношения давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность к давлению на полностью нагруженное основание по общему (полу)степенному методу.

Закон отрицания отрицания, то есть двойного отрицания, обобщается общим законом кратного отрицания и проявляется в выходе исследования напряжённо-деформированного состояния за пределы механики в оптику с возвращением, расширением предмета и углублением исследования изгиба посредством ещё и кривизн в центрах оснований именно существенно трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента как местных характеристик изгиба в дополнение к стрелам прогиба этих оснований и их центральных частей как общим характеристикам изгиба.

Анализ и синтез (теории и опыта (практики) теоретизирования и испытания (экспериментирования); наличного, потребностей, личных и общественных интересов, условий, возможностей, способностей, желаний, целей и задач; предметов, ресурсов, средств, методов и мерил (критериев); количественности и качественности; систематизации и иерархизации предметности и общности, углубления и возвышения; существенности, новизны, открытий и изобретений), обобщение и конкретизация, а также абстрагирование (отвлечение от несущественного и извлечение существенного) применяются во многих местах, в частности в приближениях, в т. ч. при создании общего (полу)степенного метода.

Сравнение, различение, выделение, сопоставление и уподобление применяются во многих местах, в частности формульно, таблично, графически и параллельностью расчётов при многовариантности методов, в том числе для доказательства достигнутого обобщения и чрезвычайно существенного уточнения соответствующих классических аналитических методов теории пластин и теории плит.

Дедукция (выведение) применяется во многих местах.

Научная индукция (наведение), по существу индуктивно-дедуктивный метод, используется для выяснения именно и только составляющих примерно три-четыре кратностей превышений стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания и его кривизны в центре стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания и его кривизной в центре соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, тогда как сами превышения доказаны дедуктивно.

Из эмпирических научных методов экспериментальные методы используются для исследования прочности органического стекла и трещинообразования в неорганическом стекле, а также для прямого измерения прогибов и давления разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, а также для изучения характера трещинообразования при разрушении такого тела.

К эмпирико-теоретическим научным методам следует отнести методы обработки данных.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 16/244

Обычно используются абсолютная и относительная погрешности и общепринятый считающийся практически незаменимым метод наименьших квадратов.

Доказано, что все они обладают целым рядом принципиальных недостатков вплоть до нелогичности, неопределённости, неинвариантности, двусмысленности, субъективизма исключения выбросов, опоры на самые худшие сохраняемые данные и даже извращений действительности.

Введена система безупречных общих методов обработки данных, в том числе всеобщая погрешность и общий метод наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, с взвешиванием по чисто формально используемому нормальному распределению безотносительно осуществления нормальности.

Это позволяет полностью отказаться от субъективного изъятия выбросов, учитывать все данные без исключения, опираться непременно на самые лучшие данные и к тому же именно правильно использовать простейшие и удобнейшие формулы метода наименьших квадратов созданным итерационным методом наименьших нормально взвешенных квадратов.

Из теоретических научных методов применяются следующие.

Принципиальность заключается в неуклонном следовании общепринятым принципам объективности, систематичности, воспроизводимости и проверяемости.

Приближение как метод применяется при доказанной невозможности точного решения и осуществляется простейшим допустимым образом, дающим настолько простые и проверяемые формулы и вычисления по ним, что при такой именно содержательной формализации достигаются неременная опора на интуицию и её творческое развитие.

Метод мысленного эксперимента осуществляется формульными и вычислительными испытаниями по аналитическим и численным методам.

Аналитические методы используются:

при создании общих теорий и методов и при решениях задач математики, метрологии, механики и прочности, в том числе при создании общих методов определения перемещений и напряжений и решения задач прочности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность;

при открытии и обосновании систем принципиально новых явлений и законов деформирования, оптики, прочности и разрушения такого тела, в частности при определении мест наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения, вероятного направления образующей первой трещины в начальный момент её развития, переходного (для опаснейшей точки) и наилучшего значений относительного давления на боковую поверхность такого тела, величины разрушающего давления;

при комплексной оптимизации основных рабочих характеристик такого тела с определением продольных расфокусировок оптической системы для высоких давлений и обоснованием его рациональных образцов;

при совершенствовании методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированного состояния и прочности такого тела при высоких давлениях и для определения погрешностей сопоставления расчётных и экспериментальных данных.

Численные методы применяются при анализе напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, а также при определении основных оптических искажений, обусловливаемых деформированием такого светопрозрачного элемента при высоких давлениях.

В качестве средств выполнения исследований выбраны:



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 17/244

для теоретических исследований – вычислительная техника (микрокалькуляторы и ЭВМ с программным обеспечением);

для экспериментальных исследований – стендовое оборудование, включающее средства создания высокого давления (насосы и компрессоры), испытательные камеры с гермовводами, соединительную и регулирующую арматуру, контрольно-измерительную аппаратуру (манометры, индикаторы), пульта дистанционного управления, а также исследуемые объекты, инструменты, съёмочная аппаратура и защитные сооружения (боксы).

Достоверность полученных экспериментальных данных обеспечивается применением современного оборудования и измерительной техники, анализом точности измерений, приемлемой математической обработкой, достижением согласованности результатов, а также сопоставлением полученных экспериментальных данных с другими данными.

Практическая ценность данной кандидатской диссертации состоит в создании теоретического фундамента для разработки теорий рациональных комплексных проектирования и управления системой указанных свойств по инженерным методам расчёта напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, прочности и оптики именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений, при заземлении края, опирании по краю или по окружности меньшего радиуса или при периферическом противодействии.

Для экспериментальных исследований полезны общие теории и методы обработки данных.

Все формулы созданных общего (полу)степенного метода и теорий деформирования, жёсткости и оптики, прочности и разрушения таких тел доведены до уровня практического использования и в принципе не требуют применения ЭВМ.

Предложены и обоснованы пути существенного повышения прочностных и оптических характеристик иллюминаторов высокого давления, разработаны рекомендации по их проектированию и изобретён целый ряд их конструкций.

Результаты данной кандидатской диссертации внедрены в Научно-исследовательском и проектном институте геофизических методов разведки океана ПО «Южморгеология» (г. Геленджик) и в Ленинградском институте точной механики и оптики и позволили усовершенствовать проектирование и расчёт подводных оптических систем, повысить качество изображения подводных объектов, увеличить достоверность получаемой информации и сократить время на проведение работ по дешифрированию экспонированного фотоматериала.

Благодаря этому в 1986 г. получен первичный годовой экономический эффект 28 тыс. руб.

Предмет защиты настоящей кандидатской диссертации

1. Созданная математическая система принципиально новых основополагающих общих теорий и методов, среди них общие теории

общих математических задач;

замкнутых собственных совокупностей классов функций для множеств операторов с общими решениями бигармонического уравнения в (полу)степенных рядах как собственных классах функций;

общий (полу)степенной метод решения множеств функциональных уравнений;

именно дополнительное альтернативное возведение в степень (минус-остепенение) с обобщением степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания, в том числе для начальных, центральных и смещённых моментов любых нецелых порядков и для обобщений общего (полу)степенного метода.

2. Созданная метрологическая система принципиально новых основополагающих общих теорий и методов, среди них

общая теория анализа приемлемости методов обработки данных (с доказанными изъянами абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов);

общие теории неточных псевдорешений, их наилучших квазирешений и всеобщей погрешности как инвариантной меры неточности, обобщающей нечёткую приближённость;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 18/244

общая теория наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при непрременной опоре на лучшие из них и при нормально взвешенном учёте всех данных безотносительно нормальности их распределения и без исключения выбросов, в том числе общий метод наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов с именно правильным использованием простейших и удобнейших формул лишь условно пригодного метода наименьших квадратов.

3. Созданная оптико-механическая система принципиально новых основополагающих общих теорий и методов, среди них:

общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов для впервые решаемых именно нетривиальных трёхмерных задач механики, прочности и оптики;

теории минимизации и устранения невязок сопряжения решений для макроэлементов разбиения тела между собой и с граничными условиями;

теории осесимметричного изгиба равномерным давлением трёхмерного цилиндрического тела при защемлении края, опирании по краю или по окружности меньшего радиуса или при повышенном равномерном периферическом противодавлении;

теория влияния этого изгиба на оптические свойства именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений.

4. Созданная прочностная система принципиально новых основополагающих общих теорий и методов, среди них:

общая теория и общие методы обобщения критериев предельных состояний и прочности, в том числе третьей и четвёртой теорий прочности, линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) критериальной предельной поверхности, и добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию;

необходимое для определения опаснейшей точки преобразование первой теории прочности (критерия наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе к виду с равносильным (эквивалентным) и с единым предельным напряжениями;

общее решение задачи прочности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность;

методы определения переходного (для опаснейшей точки) и наилучшего значений отношения давления на боковую поверхность к давлению на полностью нагруженное основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

5. Система разработанных (приложением созданных математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем общих теорий и методов) принципиально новых общих аналитических методов расчёта напряжённо-деформированных состояний, прочности и оптики именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов, с установлением приемлемости этих методов аналитическими и численными сопоставлениями полученных формул и результатов с классическими и другими известными аналитическими решениями, численными и экспериментальными данными.

6. Система впервые решённых именно нетривиальных задач механики, прочности и оптики существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов, из пластичных и хрупких материалов с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов деформирования, оптики и разрушения таких тел.

7. Созданная теория рациональных комплексных проектирования и управления напряжённо-деформированными состояниями, прочностью и оптикой именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 19/244

высоких давлений, с методами и алгоритмом комплексной оптимизации систем этих ключевых свойств таких тел.

8. Новые эффективные конструкции иллюминаторов для высоких давлений с трёхмерными светопрозрачными элементами, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

Апробация. Основные результаты исследований, обобщённых настоящей кандидатской диссертацией, докладывались и обсуждались на 12 Всесоюзных и региональных научно-технических конференциях, в том числе на IV Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах (Москва, 1982), на IV Всесоюзной конференции «Проблемы научных исследований в области изучения и освоения Мирового океана» (Владивосток, 1983), на IX Дальневосточной научно-технической конференции по повреждениям и эксплуатационной надёжности судовых конструкций (Владивосток, 1984), на Всесоюзной конференции «Теоретическая и прикладная оптика» (Ленинград, 1984), на Всесоюзном совещании по техническим средствам и методам изучения океанов и морей (Геленджик, 1985), на V Всесоюзной конференции «Технические средства изучения и освоения океана» (Ленинград, 1985).

Полностью докладывалась и обсуждалась данная кандидатская диссертация на научном семинаре при кафедре строительной механики Одесского инженерно-строительного института (1986, март), научном семинаре отдела колебаний и разрушения Института проблем прочности АН УССР (1986, апрель), кустовом тематическом семинаре № 2 «Напряжённо-деформированное состояние и расчёт на прочность» Института проблем прочности АН УССР (1986, декабрь).

Основное содержание настоящей кандидатской диссертации опубликовано в 43 научных трудах (научная монография, 8 научных статей, 34 тезиса докладов) [61–68, 88, 110, 114–116, 129, 130 и др.]. Кроме того, её разработки защищены 16 авторскими свидетельствами на изобретения [20–23, 25, 32, 36 и др.].

Настоящая кандидатская диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованных научных трудов со ссылками в тексте (200 наименований) и приложений (документов о внедрении).

# 1. АНАЛИЗ МЕТОДОВ КОНСТРУИРОВАНИЯ И РАСЧЁТА ИЛЛЮМИНАТОРОВ

## 1.1. Типичные конструкции иллюминаторов

Подводный оптический иллюминатор является неотъемлемой частью оптической системы, удовлетворяющей высоким требованиям к качеству изображения, и предназначен для защиты человека и фотокинотелевизионной аппаратуры от воздействия морской окружающей среды. Подводный оптический иллюминатор включает светопрозрачный элемент 1, оправу 2, уплотнения 3 и крепёжные детали 4 (рис. 1.1).

Оптические поверхности светопрозрачного элемента являются границами раздела внешней морской среды и атмосферы внутри аппарата, в котором располагаются люди и/или съёмочная аппаратура.

Вследствие избыточного давления внешней морской среды светопрозрачный элемент деформируется, а характер его напряжённо-деформированного состояния зависит от конструктивных параметров иллюминатора и от величины действующего на него давления.

Такие светопрозрачные материалы, как неорганическое стекло, обладают рядом особенностей по сравнению с большинством конструкционных материалов, применяемых для корпусов плавучих и подводных объектов и в технике высоких давлений, например в химической промышленности [19, 26–31, 33–40, 81, 82, 96, 121, 122, 126, 133, 142, 144, 154, 173].

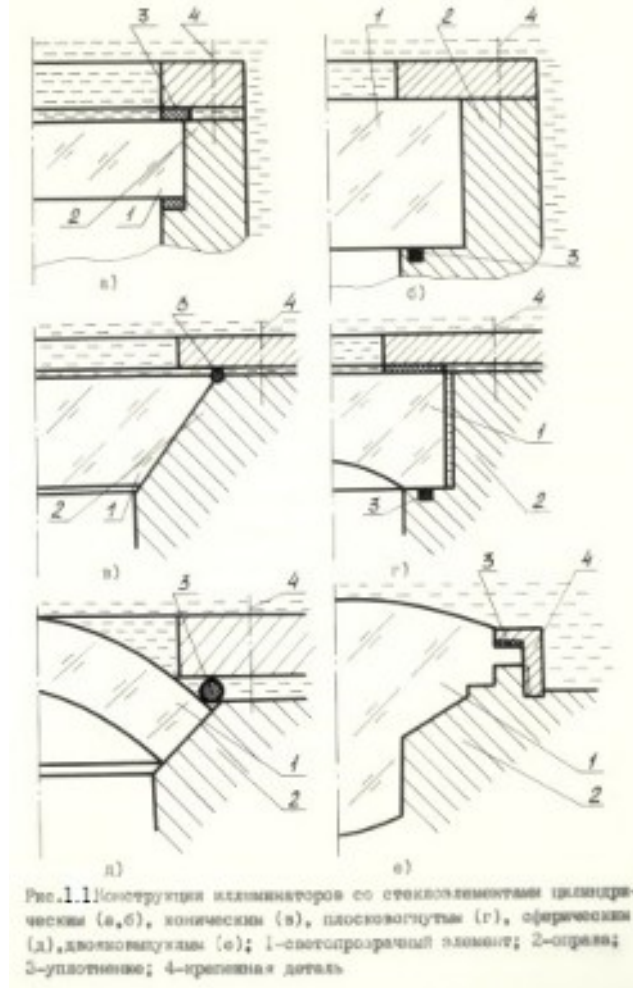


Рисунок 1.1. Конструкции иллюминаторов со стеклоэлементами цилиндрическим (а, б), коническим (в), плосковогнутым (г), сферическим (д), двояковыпуклым (е): 1 – светопрозрачный элемент; 2 – оправка; 3 – уплотнение; 4 – крепёжная деталь.

Поэтому проектирование оптических иллюминаторов является одним из узловых научно-технических аспектов проблемы создания техники высоких давлений, недостаточно освещённых в специальной технической литературе [81, 82, 121, 122, 126, 142, 144, 173].

Опыт создания иллюминаторов показывает, что их полная герметизация успешно достигается типичными методами уплотнительной техники [142, 154, 173].

При этом непосредственное воздействие на светопрозрачный элемент эластичных уплотнительных колец, материал которых при достаточно высоких давлениях следует закону Паскаля, практически не искажает характера нагружения стеклоэлемента.

Однако размещение этих колец оказывается важным с точки зрения распространения высоких гидростатических давлений на те или иные участки поверхности светопрозрачного элемента, что существенно влияет на его напряжённо-деформированное состояние.

Поэтому важно отметить различные варианты размещения уплотнительных колец в иллюминаторе относительно светопрозрачного элемента – у его боковой поверхности (см. рис. 1.1, а, в, д, е) или у периферических частей (см. рис. 1.1, б, г) его оптических поверхностей в ряде конструкций иллюминаторов [8–18, 24, 81, 82, 106, 121, 122, 126, 142, 144, 155–162, 173, 176, 183, 185–199].

Ввиду того, что светопрозрачные материалы весьма чувствительны к контактным нагрузкам, важны особенности силового взаимодействия стеклоэлемента с оправой на поверхности их сопряжения – периферической части оптической поверхности (см. рис. 1.1, а, б, г) или

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 21/244

боковой поверхности светопрозрачного элемента, которая выполняется цилиндрической (и может быть спаяна с оправой), конической (см. рис. 1.1, в, д) или комбинированной (см. рис. 1.1, е).

Поскольку обе оптические поверхности светопрозрачного элемента являются границами раздела трёх сред (внешней среды, окружающей аппарат; материала светопрозрачного элемента; воздуха внутри аппарата) с различными показателями преломления, то формы этих поверхностей оказывают определяющее влияние на ход световых лучей, а значит, на качество изображения изучаемого объекта.

В технике высоких давлений встречаются разнообразные формы оптических поверхностей – плоскопараллельные (см. рис. 1.1, а, б, в), плосковогнутые (см. рис. 1.1, г), сферические концентричные выпукло-вогнутые (см. рис. 1.1, д), двояковыпуклые (см. рис. 1.1, е) и др.

Установлено [41], что никакая конструкция иллюминатора не позволяет исключить оптические искажения, и в случае высоких требований к качеству изображения приходится использовать исправляющую оптическую систему.

Её параметры зависят от формы, размеров и расположения оптических поверхностей и материала светопрозрачного элемента, так что для каждого иллюминатора требуется, вообще говоря, индивидуальная исправляющая оптическая система.

Однако собственные искажения плоскопараллельного светопрозрачного элемента малы по сравнению с неустранимыми искажениями на границе плоской среды, окружающей изучаемый объект, и воздуха, зависящими лишь от показателя преломления этой среды [41].

Это открывает возможности для использования универсальных исправляющих оптических систем и обеспечивает важное преимущество плоскопараллельности оптических поверхностей светопрозрачного элемента.

Оно тем более возрастает в связи с возможностью их более точного исполнения, упрощением изготовления и юстировки [139] оптической системы в целом, которая сводится лишь к обеспечению параллельности оптических осей светопрозрачного элемента и исправляющей оптической системы.

Кроме того, в практически важных случаях перемещения светопрозрачного элемента с плоскопараллельными оптическими поверхностями как твёрдого целого (и, возможно, других элементов оптической системы) под действием давления не ведут к поворотам осей, а значит, к нарушению юстировки.

Поэтому с точки зрения качества изображения наиболее полезны светопрозрачные элементы именно с плоскопараллельными оптическими поверхностями, хотя и в этом случае деформирование оптических поверхностей под нагрузкой обуславливает расфокусировку системы [41] (рис. 1.2).

Вследствие перепада давлений светопрозрачный элемент деформируется, прогибаясь в сторону низкого давления и приближая изображение к задней поверхности объектива на величину продольной расфокусировки.

Допустимые (влиянием которых на качество изображения можно пренебречь) стрела прогиба  $[\Delta_{\text{раб}}]$  светового участка диаметром  $D_{\text{раб}}$  оптической поверхности со стороны низкого давления по [41] и продольная расфокусировка  $[\Delta x]$  по [177] составляют соответственно

$$(1.1) \\ [\Delta_{\text{раб}}] = \lambda/[2(n_g - n_a)], \\ [\Delta x] = 5 \text{ мкм},$$

где  $\lambda$  – длина волны света;

$n_g$  – показатель преломления материала светопрозрачного элемента;

$n_a$  – показатель преломления среды под низким давлением, обычно воздуха.

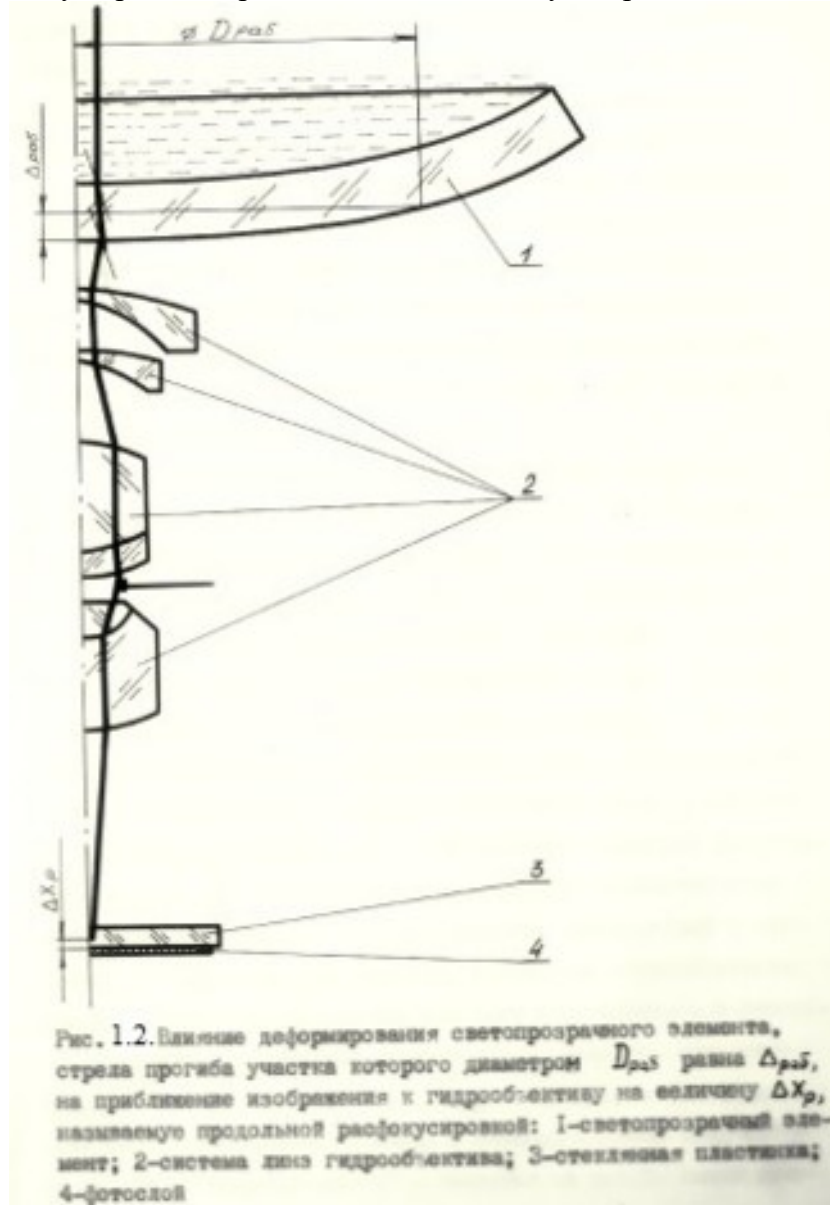


Рисунок 1.2. Влияние деформирования светопрозрачного элемента, стрела прогиба участка которого диаметром  $D_{раб}$  равна  $\Delta_{раб}$ , на приближение изображения к гидрообъективу на величину  $\Delta X_p$ , называемую продольной расфокусировкой: 1 – светопрозрачный элемент; 2 – система линз гидрообъектива; 3 – стеклянная пластина; 4 – фотослой.

В то же время известно, что для восприятия перепада равномерно распределённых давлений наилучшим с точки зрения прочности является светопрозрачный элемент с выпукловогнутыми концентрическими сферическими поверхностями [162], в котором вне его краевой зоны осуществляется напряжённно-деформированное состояние, не связанное с изгибом (в теории оболочек [70, 112, 117, 165] оно называется безмоментным). Поэтому с точки зрения комплекса рабочих свойств иллюминаторы с плоскопараллельными оптическими поверхностями могут считаться наилучшими и лишь при сверхвысоких давлениях приходится прибегать к применению сферических светопрозрачных элементов, несмотря на технологические и эксплуатационные затруднения и снижение качества изображения. Все основные научно-технические проблемы, связанные с созданием иллюминаторов, являются общими для них. Различия вносятся их размещением в подводных аппаратах или в сосудах высокого давления и средами, окружающими изучаемые объекты. Поэтому всюду в

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 23/244

дальнейшем (кроме редких случаев, когда это оговорено особо) для определённости речь будет идти о подводных оптических иллюминаторах для высоких давлений. При этом изучаемый объект и окружающая его среда, которой является вода, находятся вне обитаемого или необитаемого подводного аппарата, а люди и/или фотокинотелевизионная аппаратура – внутри подводного аппарата. Так как показатель преломления океанской воды мало изменяется [41, 87] с её составом, температурой и глубиной, то исправляющие оптические системы, называемые гидрообъективами, могут быть универсальными для всех иллюминаторов с плоскопараллельными оптическими поверхностями. Известно семейство гидрообъективов «Гидроруссар» [24, 41], созданное Ленинградским институтом точной механики и оптики. Система линз одного из них – «Гидроруссар-8» – показана на рис. 1.2.

Важно отметить, что гидростатические давления в океанских глубинах хотя и велики, но всё же ограничены величиной примерно 110 МПа (глубина Марианской впадины – 11034 м).

Поэтому с точки зрения обеспечения прочности нет необходимости в использовании сферических светопрозрачных элементов и можно ограничиться светопрозрачными элементами с плоскопараллельными оптическими поверхностями [85, 148, 149, 183].

Это положение подтверждается всей историей применения подводных иллюминаторов.

По-видимому, первый патент на подводный иллюминатор был выдан в 1889 г. в Германии, причём на протяжении четырёх десятилетий были известны лишь иллюминаторы для малых глубин с дисковыми светопрозрачными элементами малой относительной толщины из неорганического стекла. Первый подводный фотоснимок был сделан в 1893 г. Луи Бутаном на глубине примерно 1 м [180, 181]. Только в 1934 г. батисфера Биби «Век прогресса» достигла глубины 923 м, её конические светопрозрачные элементы из хрупкого кварца неоднократно разрушались [81]. Лишь появление и использование органического стекла, специфике свойств которого хорошо соответствует использованная ранее форма усечённого конуса, позволили резко повысить надёжность иллюминаторов и покорить максимальные глубины. В 1953 г. батискаф «Триест» с Огюстом Пикаром и Жаком Пикаром достиг глубины 3150 м. 23 января 1960 г. Жак Пикар и лейтенант ВМС США Дон Уолш совершили на батискафе «Триест» после модернизации рекордное погружение в Марианскую впадину на глубину 10916 м.

Известны выполненные Дж. Стэчивом лабораторные исследования кратковременной и длительной прочности и жёсткости иллюминаторов для высоких давлений преимущественно с коническими и сферическими светопрозрачными элементами из органического стекла [155–162]. Он показал, что под действием высоких гидростатических давлений светопрозрачный элемент из органического стекла весьма существенно прогибается в сторону низкого давления, что связано с низко модульностью и вязкоупругостью органического стекла. Деформирование же оптических поверхностей существенно сказывается на качестве изображения, однако это влияние Дж. Стэчивом не рассматривалось. Более того, в своих экспериментах перемещение центра оптической поверхности со стороны низкого давления он измерял относительно корпуса камеры. В результате определялась сумма собственно стрелы прогиба этой оптической поверхности, осевой проекции перемещения светопрозрачного элемента как твёрдого целого вдоль конической поверхности сопряжения с оправой, а также осевых перемещений деталей испытательной камеры. Собственно стрела прогиба оптической поверхности, являющаяся интегральной характеристикой её искривления, влияющего на качество изображения, оставалась не определённой. Измеренные Дж. Стэчивом перемещения на несколько порядков превышают допустимую [41] (1.1) стрелу прогиба  $[\Delta_{\text{раб}}]$  светового участка светопрозрачного элемента.

Такое соотношение действительных и допустимых (1.1) прогибов в случае светопрозрачного элемента из органического стекла подтверждается и расчётами по известным методам [3, 41, 48, 49, 56, 58, 79, 83, 103–105, 110, 117, 124, 127, 135, 164–166, 175, 179, 182, 184, 200].

Большие прогибы приводят к большим продольным расфокусировкам [41] и снижению качества изображения. Никакими изменениями конструкции иллюминатора со



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 24/244

Светопрозрачным элементом из органического стекла для высоких давлений нельзя существенно уменьшить оптические искажения, поскольку они связаны с неотъемлемыми свойствами органического стекла. И если в обитаемых аппаратах исследователь может выбрать наилучшую точку зрения, то в случае необитаемых аппаратов единственный путь повышения качества изображения – использование светопрозрачных материалов с более высоким модулем продольной упругости Юнга. На практике это привело к отказу от органического стекла [41, 71, 73, 90, 95, 111, 142, 152, 178] и возврату к неорганическому стеклу, специфике свойств которого лучше соответствует форма светопрозрачных элементов в виде прямого кругового цилиндра с плоскопараллельными оптическими поверхностями.

В целях повышения прочности, необходимого для высоких давлений, толщина светопрозрачных элементов выбирается соизмеримой с диаметром, а также принимаются специальные конструктивные меры, направленные на рациональное использование специфики свойств неорганического стекла [2, 31, 44, 45, 72, 84, 89, 91, 96, 107, 123, 132–134, 150, 153]. Так, предназначенный для высоких давлений иллюминатор конструкции Х. Е. Эджертона и Л. Д. Хоудли [183], показанный на рис. 1.3, предусматривает распространение гидростатического давления на часть зоны контакта с оправой и согласно исследованиям авторов работоспособен до давлений 130 МПа.

В конструкции И. И. Дьячкова, А. Л. Квитки и др. [85, 149], показанной на рис. 1.4, использована система вспомогательных отверстий и уплотнительных колец, размещённых таким образом, что внешнее гидростатическое давление распространено на центральную часть внешнего основания (её площадь равна половине его общей площади), а также на равновеликую этой части периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания и на большую часть боковой поверхности стеклоэлемента.

В результате, в отличие от предыдущих конструкций, стеклоэлемент удерживается в равновесии самим гидростатическим давлением и силового контакта его с оправой не возникает.

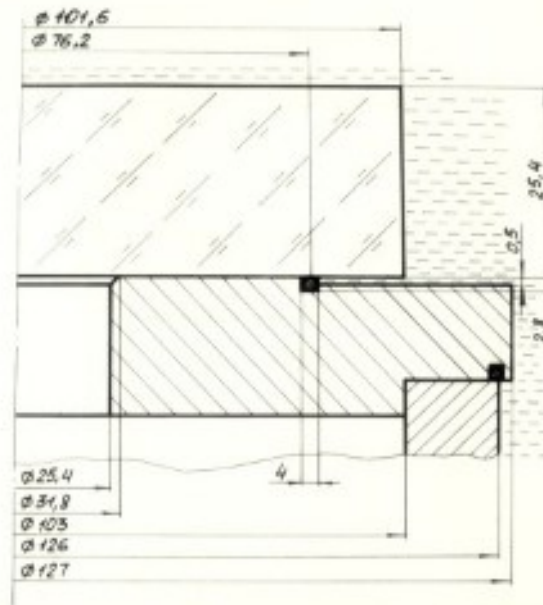


Рис. 1.3. Глубоководный иллюминатор конструкции Х.Е.Эджертона и Л.Д.Хоудли / 183 /

Рисунок 1.3. Предназначенный для высоких давлений иллюминатор конструкции Х. Е. Эджертона и Л. Д. Хоудли [183].



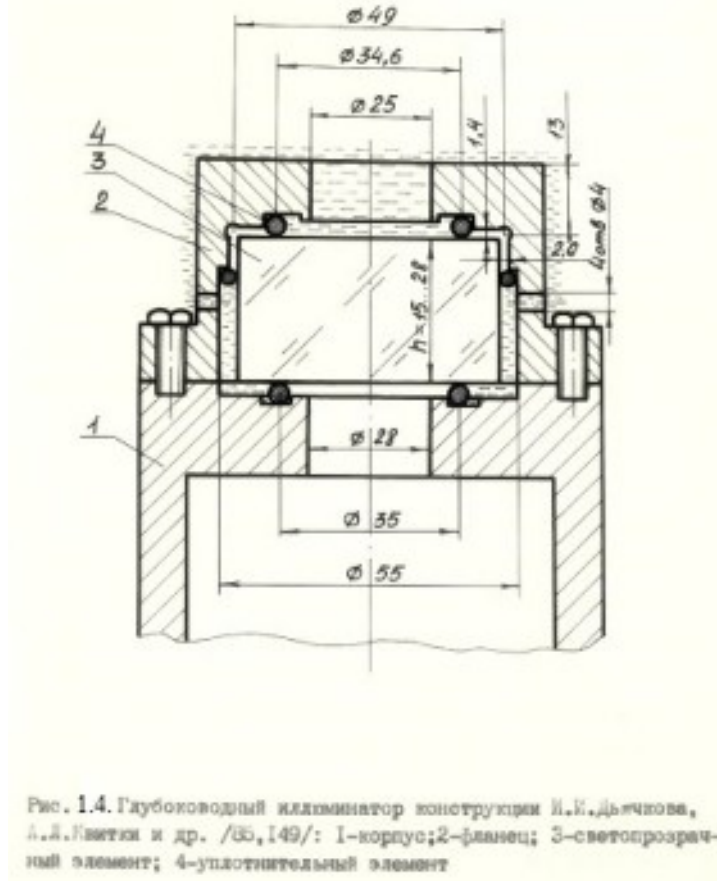


Рисунок 1.4. Предназначенный для высоких давлений иллюминатор конструкции И. И. Дьячкова, А. Л. Квитки и др. [85, 149]: 1 – корпус; 2 – фланец; 3 – светопрозрачный элемент; 4 – уплотнительный элемент.

Это положительно влияет на прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений, тем более что огромный опыт создания сборных конструкций со стеклоэлементами преимущественно оболочечного типа, накопленный Институтом проблем прочности АН УССР, показывает доминирующее влияние силовых факторов в зоне контакта стеклоэлементов с оправами на снижение прочности стеклоэлементов.

По данным авторов работ [85, 149] разрушающее давление для такого иллюминатора составляет 168 МПа и он должен выдерживать не менее 3760 циклов нагрузки давлением 59 МПа продолжительностью 1 ч или не менее 100 циклов нагрузки давлением 98 МПа продолжительностью 3 ч.

Таким образом, форма светопрозрачного элемента в виде прямого кругового цилиндра, имеющего плоскопараллельные оптические поверхности, позволяет создавать конструкции иллюминаторов, рационально использующие специфику свойств неорганического стекла.

## 1.2. Оптико-механические свойства основных светопрозрачных материалов

При создании иллюминаторов в технике высоких давлений используются различные светопрозрачные материалы, в том числе прозрачный ситалл, кварц, сапфир, алмаз, даже и поваренная соль [173].

Однако основными из них, применяемыми под водой, являются органическое стекло и неорганическое стекло. Свойства некоторых их марок в соответствии с данными [71–73, 87, 88, 90, 95, 109, 111, 145, 148, 152, 170, 178] представлены в табл. 1.1.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 26/244

Таблица 1.1. Оптико-механические свойства некоторых основных светопрозрачных материалов.

| Стекло                        | Плотность $\rho$ ,<br>1000 кг/м <sup>3</sup> | Показатель<br>преломления $n$ | Модуль<br>Юнга $E$ ,<br>1000 МПа | Коэффициент<br>Пуассона<br>$\mu$ | Предел<br>прочности<br>при растяжении $\sigma_t$ ,<br>МПа | Предел<br>прочности<br>при изгибе $\sigma_b$ ,<br>МПа | Предел<br>прочности<br>при сжатии $\sigma_c$ ,<br>МПа |
|-------------------------------|--|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|---|---|---|
| органическое<br>марки<br>ТОСП | 1.18   | 1.49                          | 3.03                             | 0.365                            | 63  | –   | 71  |
| неорганическое<br>марки К8    | 2.52   | 1.52                          | 80.6                             | 0.209                            | 29  | 60  | 1400  |

Как уже отмечалось, органическое стекло – низко модульный вязкоупругий материал [71, 73, 90, 95, 111, 152, 178].

Оно допускает снижение требований к качеству сопрягаемых поверхностей оправы и стеклоэлемента, его разрушение не носит катастрофического характера, и потому органическое стекло является более приемлемым для применения в обитаемых подводных аппаратах.

Механическая обработка органического стекла сравнительно нетрудоёмка.

Прочность органического стекла при растяжении близка к его прочности при сжатии [88].

Однако оптические свойства органического стекла даже в исходном состоянии хуже, чем у неорганического стекла.

Податливость и вязкоупругость органического стекла к тому же ведут к сравнительно большим прогибам выполненных из него светопрозрачных элементов и как следствие к значительным продольным расфокусировкам оптических систем.

Этих недостатков лишено неорганическое стекло, модуль продольной упругости Юнга которого примерно в 25...30 раз больше, чем модуль продольной упругости Юнга органического стекла.

Неорганическое стекло как материал обладает весьма высокой жёсткостью [44, 45, 85, 96, 145, 148, 153, 170], высокой прочностью при сжатии [96, 132–134, 153] и хорошими оптическими свойствами [41, 72, 87] (особенно его оптические марки [31]).

Однако оно трудно обрабатывается, хрупко и склонно к катастрофическому разрушению, обладает относительно низкой прочностью при растяжении, связанной с большим влиянием поверхностных дефектов, и предъявляет высокие требования к качеству поверхностей сопряжения стеклоэлемента с оправой.

В Институте проблем прочности АН УССР выполнена широкая программа исследований прочности неорганического стекла и сборных конструкций, включающих стеклоэлементы, с отработкой различных технических решений, в том числе с применением различных прокладок между элементами из разнородных материалов, одним из которых является неорганическое стекло [91, 96, 107, 133].

Сделана попытка применить подобные решения при создании иллюминаторов для высоких давлений [145–147].

По существу создание рациональных конструкций с неорганическим стеклом для высоких удельных нагрузок сводится к поиску технических решений, обеспечивающих практическое отсутствие зон существенного растяжения в неорганическом стекле.

Известны технологические средства, повышающие сопротивление неорганического стекла разрушению при растяжении и изгибе.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 27/244

Это его закалка [43, 50, 53, 57, 92, 169] и ионообменное упрочнение [5, 51, 52, 54, 55, 131, 167].

Повышает прочность неорганического стекла и его травление плавиковой кислотой [76, 99, 119, 140], однако оно ухудшает качество оптических поверхностей.

Влияние морской воды, колебаний влажности и температуры воздуха в зоне взаимодействия океана и атмосферы, солнечной радиации, кислорода, оброста в приповерхностных слоях моря на прочность неорганического стекла исследовалось К. К. Амеляновичем [4], Г. М. Охрименко [118], Ю. М. Родичевым [136].

Однако ещё предстоит изучение воздействия этих факторов на оптические марки неорганического стекла и на изготовленные из них светопрозрачные элементы иллюминаторов.

Значительны успехи механики разрушения, охарактеризовавшей поэтапность и длительность процессов разрушения стекла и позволившей анализировать их по характеру изломов [6, 102, 113, 120, 150, 168, 174].

В целом следует отметить, что в последнее время интенсивно изучаются прочность неорганического стекла и пути её повышения, тем более что резервы огромны, как показывает сопоставление с теоретической прочностью стекла [89, 132].

В заключение выделим два обстоятельства.

Во-первых, неорганическое стекло весьма чувствительно к напряжённым состояниям [44, 45, 96, 132–134, 153], и создание из него рациональных конструкций предъявляет высокие требования к оценке их напряжённо-деформированных состояний и прочности [84].

Во-вторых, деформирование элементов из неорганического стекла вплоть до разрушения происходит без каких-либо существенных отклонений от обобщённого закона Гука.

Поэтому в пределах сохранения сплошности неорганическое стекло может рассматриваться в расчётах как линейно упругий материал.

### **1.3. Методы расчёта светопрозрачных элементов иллюминаторов с плоскопараллельными основаниями по теории пластин, теории плит и осесимметричной теории упругости**

Проектирование иллюминаторов для высоких давлений требует проведения расчётов жёсткости, прочности и оптических свойств светопрозрачных элементов.

Для оптико-механических расчётов светопрозрачных элементов используются [41, 124, 142] решения теории круглых пластин, изгибаемых равномерным давлением и свободно опёртых либо жёстко защемлённых по контуру [56, 58, 83, 117, 164–166, 175] или свободно опёртых по концентричной окружности меньшего диаметра [56].

Известны и решения для изгиба равномерным давлением круглых плит, свободно опёртых или жёстко защемлённых по боковой поверхности [3, 49, 79, 103–105, 166, 182, 184, 200].

Отметим ещё одно известное решение задачи об изгибе круглой пластины, нагруженной давлением, равномерно распределённым по всей её поверхности с одной стороны, и удерживаемой в равновесии соответствующим равномерным же давлением, приложенным только по периферической части другой стороны [56, 179].

Для расчётной схемы круглой пластины, свободно опёртой по краю и изгибаемой равномерным давлением на одно из оснований при свободном другом основании [56, 58, 164–166, 175], введём обозначения (рис. 1.5, а):

$a$  – радиус пластины;

$r$  – текущий радиус;

$\rho = r/a$  – относительный текущий радиус;

$h$  – толщина пластины;

$z$  – текущая осевая координата, отсчитываемая от срединной поверхности пластины в сторону её основания, свободного от давления;



Рис. 1.5. Расчетная схема круглой пластины, свободно опертой (а) и жестко защемленной (б) по краю.

Рисунок 1.5. Расчётная схема круглой пластины, свободно опертой (а) или жёстко защемлённой (б) по краю.

$E, \mu$  – модуль продольной упругости Юнга и коэффициент поперечной деформации Пуассона материала пластины соответственно;

$D = Eh^3/(12(1 - \mu^2))$  – цилиндрическая жёсткость пластины;

$Q_r(r)$  – интенсивность радиальной поперечной силы на единицу длины цилиндрического сечения пластины;

$M_r(r)$  – интенсивность радиального изгибающего момента на единицу длины цилиндрического сечения пластины;

$\sigma_r(r, z) = 12M_r(r)z/h^3$  – радиальное напряжение;

$M_t(r)$  – интенсивность окружного (тангенциального) изгибающего момента на единицу длины цилиндрического сечения пластины;

$\sigma_t(r, z) = 12M_t(r)z/h^3$  – окружное (тангенциальное) напряжение;

$u_r(r, z)$  – радиальное перемещение точки  $(r, z)$ ;

$u_z(r, z)$  – осевое перемещение точки  $(r, z)$  относительно точки  $(a, 0)$  края пластины.

Тогда

$$u_z(r, z) = pa^4(1 - \rho^2)((5 + \mu)/(1 + \mu) - \rho^2)/(64D);$$

$$M_r(r) = pa^2(3 + \mu)(1 - \rho^2)/16;$$

$$M_t(r) = pa^2(3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2)/16.$$

Прогиб пластины

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 29/244

$$u_z(r, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)((5 + \mu)a^2/(1 + \mu) - r^2)/h^3$$

максимален в центре  $r = 0$ :

$$(1.2a)$$

$$u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^4/h^3.$$

Радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения

$$\sigma_r(r, z) = (3/4)(3 + \mu)pz(a^2 - r^2)/h^3;$$

$$\sigma_t(r, z) = (3/4)pz((3 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2)/h^3$$

максимальны и равны между собой в центре поверхности низкого давления:

$$(1.2б)$$

$$\sigma_r(r, h/2) = \sigma_t(r, h/2) = (3/8)(3 + \mu)pa^2/h^2.$$

Здесь и в дальнейшем (если это не оговаривается особо) в формулы не вводятся элементарные поправки на обжатие боковой поверхности стеклоэлемента равномерным давлением.

Такой подход не только упрощает формулы, но и вследствие своего единообразия позволяет проводить сопоставление различных методов расчёта.

Расчётная схема свободно опёртой по краю пластины (здесь и в дальнейшем подразумеваются осесимметричная задача и равномерное распределение давления) является простейшей из тех, которые хотя бы качественно отражают характер деформирования светопрозрачного элемента.

Эта расчётная схема основана на гипотезе нерастяжимости срединной поверхности и на гипотезе прямых нормалей, что оправдано при

$$u_z(0, 0) \ll h \ll a.$$

С. А. Алексеев [3] вскрыл физические основы погрешностей теории пластин, связанные с принятием гипотезы прямых нормалей [70, 112, 117, 165].

Во-первых, нормали к срединной плоскости не только поворачиваются в соответствии с её прогибом, но и сдвигаются, утрачивая перпендикулярность к деформированной срединной поверхности.

Количественный учёт сдвига нормалей выполнили С. П. Тимошенко и С. Войновский-Кригер [165] также для жёсткого защемления края, а применительно к расчётной схеме свободного опирания края дали формулу

$$(1.3)$$

$$u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^4/h^3 + (3/4)(3 + \mu)(p/E)a^2/h,$$

отличающуюся от формулы (1.2a) вторым слагаемым, которое пренебрежимо мало лишь при  $h \ll a$ .

Во-вторых, нормали искривляются в связи с изменением вдоль них напряжённого состояния и эффектом поперечных деформаций от сжимающих осевых напряжений, изменяющихся с толщиной, что описывается коэффициентом поперечной деформации Пуассона  $\mu$ .

Эффект искривления нормалей пренебрежимо мал лишь при

$$\mu \ll 1.$$

В-третьих, длины нормалей изменяются в соответствии с обобщённым законом Гука.

Пока толщина пластины мала по сравнению с минимальным характерным размером её оснований, отступления от гипотезы прямых нормалей невелики и теория пластин применима.

Однако у светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений толщина – одного порядка величины с диаметром.

Поэтому результаты С. А. Алексеева [3] позволяют предположить, что и в случае граничных условий, характерных для светопрозрачного элемента, но не рассматриваемых известными замкнутыми решениями теории упругости, максимальные напряжения занижаются теорией пластин в гораздо меньшей степени, чем прогибы, и что теория пластин неприемлема для расчёта светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 30/244

Поскольку для светопрозрачных элементов толщина  $h$  и радиус  $a$  – величины одного порядка, то следует ожидать наличия погрешности, связанной со значительной относительной толщиной  $h/a$  светопрозрачного элемента.

Поправка на толщину сплошного цилиндрического элемента предложена и в работе [58]:

$$(1.4) \quad u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^4/h^3 + (21/160)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^2/h,$$

Среди известных более точна расчётная схема сплошного цилиндрического элемента, поддерживаемого по боковой поверхности через механизм сдвиговых напряжений [3, 48, 49, 79, 103–105, 127, 182, 184, 200].

Метод теории упругости предполагает отказ от характерных для сопротивления материалов упрощающих гипотез.

Однако даже в рассматриваемом случае простых геометрии тела и характера нагрузки совершенно удовлетворительное решение отсутствует.

Изгиб круглой плиты равномерно распределённой нагрузкой изучен в работе [182], где рассмотрены случаи отсутствия либо радиального, либо осевого перемещения на всей боковой поверхности плиты.

Представляет интерес применение в теории плит методов решения задач теории упругости с помощью функций напряжений [49, 104, 105, 135, 166].

Если геометрия тела и приложенная нагрузка осесимметричны, то вводятся функции напряжений Лява  $L(r, z)$  [105].

Радиальное  $u_r(r, z)$  и осевое  $u_z(r, z)$  перемещения, радиальное  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$ , осевое  $\sigma_z(r, z)$  и сдвиговое  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжения определяются однозначно через функцию напряжений Лява  $L(r, z)$  с помощью линейных дифференциальных операторов:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u_r(r, z) &= -(2G)^{-1} \partial^2 L(r, z) / (\partial r \partial z); \\ u_z(r, z) &= (2G)^{-1} (2(1 - \mu) \nabla^2 - \partial^2 / \partial z^2) L(r, z); \\ \sigma_r(r, z) &= (\partial / \partial z) (\mu \nabla^2 - \partial^2 / \partial r^2) L(r, z); \\ \sigma_t(r, z) &= (\partial / \partial z) (\mu \nabla^2 - r^{-1} \partial / \partial r) L(r, z); \\ \sigma_z(r, z) &= (\partial / \partial z) ((2 - \mu) \nabla^2 - \partial^2 / \partial z^2) L(r, z); \\ \tau_{rz}(r, z) &= (\partial / \partial r) ((1 - \mu) \nabla^2 - \partial^2 / \partial z^2) L(r, z), \end{aligned}$$

где

$G = E / (2(1 + \mu))$  – модуль сдвига;

$\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + \partial^2 / \partial z^2$  – оператор Лапласа.

Бигармоничность функции Лява

$$\nabla^2 \nabla^2 L(r, z) = 0$$

обеспечивает точное выполнение уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \partial \sigma_r(r, z) / \partial r + \partial \tau_{rz}(r, z) / \partial z + r^{-1} (\sigma_t(r, z) - \sigma_r(r, z)) &= 0; \\ \partial \tau_{rz}(r, z) / \partial r + \partial \sigma_z(r, z) / \partial z + r^{-1} \tau_{rz}(r, z) &= 0 \end{aligned}$$

и уравнений совместности деформаций в напряжениях

$$(\partial / \partial r) (\sigma_t(r, z) - \mu (\sigma_r(r, z) + \sigma_z(r, z))) + (1 + \mu) r^{-1} (\sigma_t(r, z) - \sigma_r(r, z)) = 0;$$

$$r \partial^2 / \partial z^2 (\sigma_t(r, z) - \mu (\sigma_r(r, z) + \sigma_z(r, z))) - 2(1 + \mu) \partial \tau_{rz}(r, z) / \partial z + (\partial / \partial r) (\sigma_z(r, z) - \mu (\sigma_r(r, z) + \sigma_t(r, z))) = 0.$$

С. П. Тимошенко и Дж. Гудьер [166] для решения задачи об изгибе круглой плиты, свободно опёртой по краю, индуктивным путём показали возможность использования шестой степени функции напряжений Лява в виде наложения (суперпозиции) нескольких элементарных решений. В работе [166] они получены с помощью перехода к полярной системе координат и полиномов Лежандра.

Коэффициенты при этих решениях выбираются удовлетворяющими граничным условиям на обоих торцах (плоских основаниях). Кроме того, аннулируется (приравнивается нулю) интеграл, которым выражается изгибающий момент на краю.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 31/244

При выборе системы координат согласно рисунку 1.5, а формулы для осевого перемещения  $u_z(r, 0)$ , радиального  $\sigma_r(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений принимают вид

$$(1.6)$$

$$u_z(r, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)((5 + \mu)a^2/(1 + \mu) - r^2)/h^3 + (3/40)(8 + \mu + \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)/h;$$

$$\sigma_r(r, z) = (3/4)(3 + \mu)pz(a^2 - r^2)/h^3 - (3/20)(2 + \mu)pz/h + (2 + \mu)pz^3/h^3;$$

$$\sigma_z(r, z) = p(-1/2 + (3/2)z/h - z^3/h^3);$$

$$\tau_{rz}(r, z) = -3pr/h(1/4 - z^2/h^2).$$

Известен лишь частичный анализ этого решения.

В работе [166] отмечено, что граничное условие тождественного аннулирования радиального напряжения на краю  $\sigma_r(a, z)$  выполняется лишь в смысле равенств нулю среднего и изгибающего момента, и указано, что использование для функции напряжений Лява  $L(r, z)$  более высокой степени, чем шестая, позволяет получить решения задач с более сложными распределениями нагрузок и вообще граничными условиями.

Однако остались нераскрытыми вопросы о возможности уточнить полученное приближённое решение с использованием той же шестой степени функции напряжений Лява либо путём её повышения.

В работах [104, 164] оценены поправки к теории тонких пластин в формулах для осевого перемещения  $u_z(0, 0)$  и радиального напряжения  $\sigma_r(0, 0)$  и сделан вывод о малых погрешностях теории тонких пластин при условии

$$h/(2a) \leq 0.1.$$

Для светопрозрачного элемента с жёстко защемлённым краем [128] теория тонких пластин, основанная на упрощающих гипотезах о характере деформирования, в системе координат согласно рис. 1.5, б даёт следующее решение:

$$u_z(r, z) = pa^4(1 - \rho^2)^2/(64D);$$

$$M_r(r) = pa^2(1 + \mu - (3 + \mu)\rho^2)/16;$$

$$M_t(r) = pa^2(1 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2)/16;$$

$$u_z(r, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)^2/h^3;$$

$$\sigma_r(r, z) = (3/4)p((1 + \mu)a^2 - (3 + \mu)r^2)z/h^3;$$

$$\sigma_t(r, z) = (3/4)p((1 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2)z/h^3.$$

Максимальные значения перемещений и напряжений

$$(1.7)$$

$$u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)a^4/h^3;$$

$$\sigma_r(a, -h/2) = (3/4)pa^2/h^2.$$

Уточнённая формула имеет вид

$$(1.8)$$

$$u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)a^4/h^3 + (5/8)(1 - \mu^2)(p/E)a^2/h.$$

Учёт сдвига нормалей даёт

$$(1.9)$$

$$u_z(r, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)^2/h^3 + (3/4)(1 + \mu)(p/E)(a^2 - r^2)/h.$$

Второй член в формуле (1.9) является поправочным к теории тонких пластин, он несуществен лишь при

$$h \ll a.$$

В работе [164] также отмечено, что формула (1.9) совпадает с результатом, полученным в работе [105] методами теории упругости.

В работах [3, 103–105] предложены различные подходы к решению задачи об изгибе круглой плиты с жёстко защемлённым краем и различные варианты удовлетворения граничных условий на краю. По существу эти варианты сводятся к одному:

$$\int_{-h/2}^{h/2} u_z(a, z) dz = 0;$$

$$u_z(a, h/2) = 0.$$

В работе [3] приведены следующие формулы:

$$(1.10)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 32/244

$$u_r(r, z) = - (3/4)(1 - \mu^2)(p/E)(1 - r^2/a^2 - (2 - \mu)(1 - 4z^2/h^2)h^2/a^2)/(3(1 - \mu))a^2rz/h^3;$$

$$u_z(0, z) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(1 + (8 - \mu)h^2/(3(1 - \mu)a^2) - (4\mu/(1 - \mu) + 4\mu(4 + \mu)h^2/(3(1 - \mu)^2a^2))a^4/h^3);$$

$$\sigma_r(a, -h/2) = (3/4)p(1 - \mu(4 - 3\mu + \mu^2)h^2/(3(1 - \mu)^2a^2))a^2/h^2;$$

$$\sigma_r(a, h/2) = - (3/4)p(1 + \mu^2(1 + \mu)h^2/(3(1 - \mu)^2a^2))a^2/h^2.$$

В работе [3] оценены погрешности теории тонких пластин.

Поправка составляет

для прогиба

$$13 \% \text{ при } h/a = 1/5$$

и

$$53 \% \text{ при } h/a = 2/5;$$

для наибольшего растягивающего напряжения

$$12 \% \text{ при } h/a = 2/5;$$

для наибольшего сжимающего напряжения

$$2 \% \text{ при } h/a = 2/5.$$

Следовательно, при относительной толщине  $h/a$  не более  $2/5$  теория тонких пластин определяет достаточно надёжно только напряжения, но не прогибы.

Предложен и развит символический метод А. И. Лурье решения задач о слое и плите, приведено решение для случая  $u_r(a, z) = 0$  путём разложения перемещений в бесконечные ряды с использованием цилиндрических функций Бесселя [103, 104].

Символический метод нашёл своё дальнейшее развитие в работах [100, 127], а решение для жёсткого защемления – в работах [74, 75].

В работе [3] дана классификация направлений в теории плит и рассмотрены шарнирное опирание и своеобразное закрепление края при равномерном давлении.

Разработан метод решения задачи о нагружении плиты с приближённым выполнением граничных условий на боковых поверхностях и применён к решению задач о различных условиях опирания кольцевой плиты [48].

В работе [49] предложено общее решение осесимметричной задачи через бигармоническую функцию напряжений, выделены алгебраические части формул, содержащих ряды функций Бесселя, и приведены соответствующие выражения для напряжений, содержащие несколько произвольных постоянных и позволяющие решить задачу о сплошном или полом цилиндре с равномерными давлениями на торцах.

Ряд общих подходов к решению задач для сплошных и в особенности полых цилиндрических тел изложен в работах [83, 94].

Во всех указанных работах отсутствует достаточно полное изложение решений для изгиба равномерным давлением на одно основание круглой плиты, свободно опертой или жёстко защемлённой по краю (боковой поверхности).

В лучшем случае приводятся некоторые формулы, показывающие применимость теории тонких пластин при отношении толщины к диаметру не более 0.1.

Не оценивается погрешность в удовлетворении граничных условий на боковой поверхности.

Не рассматриваются различные способы приближённого выполнения этих условий.

Совершенно не рассматриваются плиты с толщиной порядка диаметра, характерной для светопрозрачных элементов для высоких давлений.

Решения, содержащие бесконечные ряды цилиндрических функций Бесселя, неудобны для практического использования, особенно при усложнении граничных условий, учитывающих действительную опору. В то же время нет попыток рассмотреть сколько-нибудь общее представление функции Лява, которое дало бы в известном смысле лучшее из элементарных решений задачи о деформировании именно существенно трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Пожалуй, ещё важнее следующее обстоятельство. Во всех известных решениях одностороннее равномерное давление на торец (плоское основание) уравнивается



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 33/244

сдвиговым напряжением на боковой поверхности. Для сплошного цилиндрического элемента с жёстко защемлённым краем в действительности дело обстоит именно так.

Если же сплошной цилиндрический элемент свободно опёрт, как это обычно бывает, то давление на торец уравнивается контактным давлением опоры на другой торец.

Расчётная схема частично оправдывалась бы только в том случае, если бы сплошной цилиндрический элемент самым краем контактировал с узкой опорой. Однако такая опора удобна для расчётной схемы, а не для светопрозрачного элемента: его несущая способность оказывается малой вследствие разрушения края.

Реально могут использоваться два варианта опирания.

В первом варианте узкая зона контакта с опорой полезна лишь для аннулирования прогиба центра сплошного цилиндрического элемента за счёт прогиба края, а для этого зона контакта должна быть удалена от края на некоторое расстояние, подлежащее определению.

Отсутствие прогиба центра светопрозрачного элемента полезно тем, что практически не изменяются его оптические свойства при давлении и не ухудшается качество изображения.

Второй вариант опирания имеет целью снижение контактных давлений опоры на сплошной цилиндрический элемент путём увеличения ширины контакта.

В этом случае с опорой контактирует кольцевая часть торца сплошного цилиндрического элемента от края до центрального круга – светового сечения.

В обоих случаях известные решения для толстых плит принципиально неприемлемы.

Поэтому приведём имеющиеся решения [56, 179], основанные на упрощающих гипотезах теории тонких пластин, позволяющие учесть действительные условия опирания (рис. 1.6).

На рис. 1.6, а показана расчётная схема круглой плиты или пластины под равномерным давлением, свободно опёртой по концентрической окружности меньшего радиуса  $a_1$ .

Здесь и далее, если явно не оговорено иное, текущая осевая координата  $z$  отсчитывается от основания плиты или пластины, свободного от давления, в сторону её основания под давлением, а осевое перемещение  $u_z(r, z)$  с положительным направлением от частично нагруженного основания к полностью нагруженному основанию отсчитывается относительно условно неподвижного края  $(a_1, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания.



Рис. 1.6. Расчётная схема круглой плиты, опёртой по концентрической окружности меньшего диаметра (а), на широкое кольцо (б), жёстко защемленной (в) и свободно опёртой (г) по краю.

Рисунок 1.6. Расчётная схема круглой плиты или пластины, опёртой по концентрической окружности меньшего радиуса (а), с повышенным равномерным периферическим противодействием (б), жёстко защемлённой (в) или свободно опёртой (г) по краю.

В принятой системе координат с учётом соответствующих формул для радиального напряжения

$$\sigma_r(r, z) = 6M_r(r)(1 - 2z/h)/h^2$$

и для окружного (тангенциального) напряжения

$$\sigma_t(r, z) = 6M_t(r)(1 - 2z/h)/h^2$$

и при дополнительном обозначении

$$\beta = a_1/a$$

расчётные формулы [56, 179] для круглой пластины имеют следующий вид:

$$(1.11)$$

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  круглой пластины

$$u_z(r, z) = -pa^4((1 + \mu)\rho^4 - 2(1 + 3\mu + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)\rho^2 + 2(1 + 3\mu)\beta^2 + (3 - 5\mu)\beta^4 + 8(1 + \mu)\beta^2\ln\beta)/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(0, z) = -pa^4(2(1 + 3\mu)\beta^2 + (3 - 5\mu)\beta^4 + 8(1 + \mu)\beta^2\ln\beta)/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a_1, z) = 0;$$

$$M_r(r) = pa^2(- (3 + \mu)\rho^2 + 1 + 3\mu + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_r(0) = pa^2(1 + 3\mu + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_r(a_1) = pa^2((1 + 3\mu)(1 - \beta^2) + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(r) = pa^2((1 + 3\mu)(1 - \rho^2) + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(0) = pa^2(1 + 3\mu + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(a_1) = pa^2(1 + 3\mu + (1 - 5\mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a_1^2a^2/h^4 + (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu)^2(a_1^2a^2/h^4)\ln(a/a_1) + ((3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1))r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1) - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2 + (- (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1) + (3/4)(3 + \mu)r^2/h^2)z/h;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1) - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2 + (- (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1) + (3/4)(1 + 3\mu)r^2/h^2)z/h;$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  круглой пластины

$$u_z(r, z) = -pa^4((1 + \mu)\rho^4 + 2(3 + \mu - 2(1 - \mu)\beta^2 - 4(1 + \mu)\ln\beta - 4(1 + \mu)\ln(\rho/\beta))\rho^2 - 2(3 + \mu)\beta^2 + (3 - 5\mu)\beta^4 + 8(1 + \mu)\beta^2(2\ln\beta - \ln\rho))/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a_1, z) = 0;$$

$$u_z(a, z) = -pa^4(7 + 3\mu - 2(5 - \mu)\beta^2 + (3 - 5\mu)\beta^4 + 16(1 + \mu)\beta^2\ln\beta)/(64D(1 + \mu));$$

$$M_r(r) = pa^2((3 + \mu)(1 - \rho^2) + 2(1 - \mu)\beta^2(1 - 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\ln\rho)/16;$$

$$M_r(a_1) = pa^2((1 + 3\mu)(1 - \beta^2) + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_r(a) = 0;$$

$$M_t(r) = pa^2(5\mu - 1 - (1 + 3\mu)\rho^2 + 2(1 - \mu)\beta^2(1 + 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\ln\rho)/16;$$

$$M_t(a_1) = pa^2(1 + 3\mu + (1 - 5\mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(a) = pa^2(1 - \mu)(2\beta^2 - 1)/8;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/2)(1 - \mu^2)(a_1^2a^2/h^4)\ln(a_1/(ah)) + (3/2)(1 - \mu^2)(a_1^2a^2/h^4)\ln(r/h) + ((3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)(a^2/h^2)\ln(a/h))r^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)(a^2/h^2)(r^2/h^2)\ln(r/h) - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = - (3/4)(1 - \mu)a_1^2a^2/(h^2r^2) + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/h) + (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(r/h) - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2 + ((3/2)(1 - \mu)a_1^2a^2/(h^2r^2) - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/h) - 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(r/h) + (3/4)(3 + \mu)r^2/h^2)z/h;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = (3/4)(1 - \mu)a_1^2a^2/(h^2r^2) + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(- 1 + 5\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/h) + (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(r/h) - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2 + (- (3/2)(1 - \mu)a_1^2a^2/(h^2r^2) - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(- 1 + 5\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/h) - 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(r/h) + (3/4)(1 + 3\mu)r^2/h^2)z/h.$$

На рис. 1.6, б показана расчётная схема круглой плиты или пластины, опёртой на широкое кольцо меньшим радиусом  $a_1$  и большим радиусом  $a$ .

Предполагается равномерное вдоль радиуса контактное давление

$$p_2 = pa^2/(a^2 - a_1^2)$$

опоры на плиту или пластину.

Для круглой пластины эта расчётная схема является суперпозицией (наложением) двух следующих расчётных схем [56, 179]:

1) расчётной схемы свободно опёртой по краю круглой пластины радиусом  $a$ , нагруженной давлением  $p$  на верхнее основание:

$$u_z(r, z) = -pa^4(1 - \rho^2)((5 + \mu)/(1 + \mu) - \rho^2)/(64D);$$

$$M_r(r) = pa^2(3 + \mu)(1 - \rho^2)/16;$$

$$M_t(r) = pa^2(3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2)/16;$$

2) расчётной схемы свободно опёртой по краю круглой пластины радиусом  $a$ , нагруженной давлением  $-p_2$  на периферическую часть верхнего основания:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  круглой пластины

$$u_z(r, z) = -p_2a^4(-2\rho^2(3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 - 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta) + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + (7 + 3\mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^4\ln\beta)/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(0, z) = -p_2a^4(5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + (7 + 3\mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^4\ln\beta)/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a_1, z) = -p_2a^4(-6\beta^2 - 2\mu\beta^2 + 8\beta^4 - 2(1 - \mu)\beta^6 + 8\beta^4(1 + \mu)\ln\beta + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + (7 + 3\mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^4\ln\beta)/(64D(1 + \mu));$$

$$M_r(r) = p_2a^2(3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_r(0) = p_2a^2(3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_r(a_1) = p_2a^2(3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(r) = p_2a^2(3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(0) = p_2a^2(3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(a_1) = p_2a^2(3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  круглой пластины

$$u_z(r, z) = -p_2a^4((1 + \mu)\rho^4 - 2((3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^2\ln\rho)\rho^2 - 4(1 + \mu)\beta^4\ln\rho + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + 2(1 - \mu)\beta^4)/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a_1, z) = -p_2a^4((1 + \mu)\rho^4 - 2((3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^2\ln\rho)\rho^2 - 4(1 + \mu)\beta^4\ln\rho + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + 2(1 - \mu)\beta^4)/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a, z) = -p_2a^4((1 + \mu)\rho^4 - 2((3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^2\ln\rho)\rho^2 - 4(1 + \mu)\beta^4\ln\rho + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + 2(1 - \mu)\beta^4)/(64D(1 + \mu));$$

$$M_r(r) = p_2a^2((3 + \mu)(1 - \rho^2) + (1 - \mu)\beta^4(1 - 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2\ln\rho)/16;$$

$$M_r(a_1) = p_2a^2((3 + \mu)(1 - \rho^2) + (1 - \mu)\beta^4(1 - 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2\ln\rho)/16;$$

$$M_r(a) = p_2a^2((3 + \mu)(1 - \rho^2) + (1 - \mu)\beta^4(1 - 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2\ln\rho)/16;$$

$$M_t(r) = p_2a^2(3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2 + (1 - \mu)\beta^4(1 + 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2\ln\rho - 4(1 - \mu)\beta^2)/16;$$

$$M_t(a_1) = p_2a^2(3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2 + (1 - \mu)\beta^4(1 + 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2\ln\rho - 4(1 - \mu)\beta^2)/16;$$

$$M_t(a) = p_2a^2(3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2 + (1 - \mu)\beta^4(1 + 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2\ln\rho - 4(1 - \mu)\beta^2)/16.$$

Итоговые (для суперпозиции обеих расчётных схем) формулы для осевого перемещения  $u_z(r, z)$ , радиального  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  напряжений:

$$(1.12)$$

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  круглой пластины

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 - (3/2)(1 - \mu^2)(a_1^4a^2/(h^4(a^2 - a_1^2))\ln(a/a_1) + ((3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)(a_1^2a^2/(h^2(a^2 - a_1^2))\ln(a/a_1))r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4);$$

$$\sigma_r(r, z)/p = (1 - 2z/h)((3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)(a_1^2a^2/(h^2(a^2 - a_1^2))\ln(a/a_1) - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2);$$

$$\sigma_t(r, z)/p = (1 - 2z/h)((3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)(a_1^2a^2/(h^2(a^2 - a_1^2))\ln(a/a_1) - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2);$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  круглой пластины

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a_1^4/(a^2(a^2 - a_1^2)) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4a^2/(h^4(a^2 - a_1^2)) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4a^2/(h^4(a^2 - a_1^2))\ln(a/h) - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4a^2/(h^4(a^2 - a_1^2))\ln(r/h) + ((3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a_1^4/(h^2(a^2 - a_1^2)) - (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2\ln(a/h)/(h^2(a^2 - a_1^2)))r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2a^2/(a^2 - a_1^2)r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = (1 - 2z/h)((3/8)a_1^4a^2/(h^2(a^2 - a_1^2)r^2) - (3/8)(1 - \mu)a_1^4/(h^2(a^2 - a_1^2)) + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/r) - (3/8)(3 + \mu)a_1^2(a^2 - r^2)/(h^2(a^2 - a_1^2)));$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 36/244

$$\sigma_r(r, z)/p = (1 - 2z/h) \left[ -\frac{3}{8} a_1^4 a^2 / (h^2 (a^2 - a_1^2) r^2) - \frac{3}{8} (1 - \mu) a_1^4 / (h^2 (a^2 - a_1^2)) + \frac{3}{2} (1 + \mu) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/r) + \frac{3}{8} (1 - 5\mu) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) + \frac{3}{8} (3 + \mu) a^2 r^2 / (h^2 (a^2 - a_1^2)) \right].$$

Известны различные подходы к расчёту оптических свойств плоских светопрозрачных элементов.

В работах [41, 142] учитывается прогиб сплошного цилиндрического элемента как свободно опертой по краю пластины, в остальных случаях деформация стеклоэлемента вообще не учитывается. При этом оказывается, что в воздухе плоский светопрозрачный элемент не влияет на изображение бесконечно удалённых предметов, а при конечном не слишком малом удалении влияет слабо.

Вода увеличивает на треть масштаб изображения и уменьшает на треть поле зрения, однако считается, что сам стеклоэлемент и в этом случае вносит несущественные изменения, как и в воздухе [41].

Эти четыре основные расчётные схемы изгиба цилиндрических тел вместе с некоторыми основными формулами для перемещений и напряжений приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2.

Известные аналитические решения для изгиба цилиндрических тел.

В левом столбце – четыре расчётные схемы для следующих способов удержания равновесия в порядке сверху вниз:  
 свободное опирание края;  
 жёсткое защемление края;  
 опирание по окружности меньшего радиуса;  
 равномерное противодавление на периферическую часть основания со свободной центральной частью.

Таблица 1.2.

Известные аналитические решения для изгиба цилиндрических тел

| Схема изгиба | Теория пластины  | Уточнение А.С.Вольмира                                   | Учет сдвига нормали С.П. Тимошенко              | Теория плит А.Дель, А.И.Дурье, С.А.Александров  |
|--------------|--|--|---|---|
|              | $u_z(0,0) = -\frac{3}{16}(1-\mu)(5+\mu)\frac{p}{E}\frac{a^2}{h^2}$<br>$\sigma_{r,t}(0,0) = \frac{3}{8}(3+\mu)\frac{p}{h^2}P$   | $-\frac{21}{80}(1-\mu)(5+\mu)\frac{p}{E}\frac{a^2}{h^2}$ | $-\frac{1}{4}(3+\mu)\frac{p}{E}\frac{a^2}{h^2}$ | $-\frac{3}{16}(8+\mu+\mu^2)\frac{p}{E}\frac{a^2}{h^2}$<br>$\frac{1}{16}(2+\mu)P$  |
|              | $u_z(0,0) = -\frac{3}{16}(1-\mu^2)\frac{p}{E}\frac{a^2}{h^2}$<br>$\sigma_r(a,h) = \frac{3}{4}\frac{a^2}{h^2}P$   | $-\frac{3}{8}(1-\mu^2)\frac{p}{E}\frac{a^2}{h^2}$        | $-\frac{3}{4}(1-\mu)\frac{p}{E}\frac{a^2}{h^2}$ | $-\frac{1}{4}(1-\mu)(2-\mu-\frac{1+\mu}{4}\frac{a^2}{r^2})\frac{p}{E}\frac{a^2}{h^2}$<br>$-\frac{1}{4}\mu\frac{4-3\mu+\mu^2}{(1-\mu)^2}P$ |
|              | $u_z(0,0) = \left[ -\frac{3}{16}(1-\mu)(1+3\mu)\frac{a^2 a^2}{h^2} - \frac{3}{16}(1-\mu) \times (3-5\mu)\frac{a^2}{h^2} + \frac{3}{16}(1-\mu^2)\frac{a^2 a^2}{h^2} \ln\frac{a}{a_1} \right] \frac{p}{E} h$<br>$\sigma_{r,t}(0,0) = \left[ \frac{3}{4}(1-\mu)\frac{a^2}{h^2} + \frac{3}{8}(1+3\mu)\frac{a^2}{h^2} - \frac{3}{8}(1-\mu)\frac{a^2}{h^2} \ln\frac{a}{a_1} \right] P$ | —  | —   | —   |
|              | $u_z(0,0) = \left[ -\frac{3}{16}(1-\mu)(1+3\mu)\frac{a^2 a^2}{h^2} - \frac{3}{16}(1-\mu^2) \times \frac{a^2}{h^2} \frac{a^2}{a_1^2} \ln\frac{a}{a_1} \right] \frac{p}{E} h$<br>$\sigma_{r,t}(0,0) = \left[ \frac{3}{8}(1-\mu)\frac{a^2}{h^2} + \frac{3}{8}(1-\mu) \times \frac{a^2}{h^2} \frac{a^2}{a_1^2} \ln\frac{a}{a_1} \right] P$   | —  | —   | —   |

В ней и всюду в дальнейшем приняты следующие обозначения:

$p$  – гидростатическое давление;

$E, \mu$  – модуль продольной упругости Юнга и коэффициент поперечной деформации Пуассона материала сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента;

$h, a, a_1$  – толщина и радиус сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента, и радиус ненагруженной части его частично нагруженного внутреннего основания;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 37/244

$r, z$  – цилиндрические координаты: текущий радиус и текущая осевая координата, отсчитываемая от частично нагруженного внутреннего основания в сторону внешнего основания полностью под давлением среды;

$u_r(r, z)$  – радиальное перемещение точки  $(r, z)$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента;

$u_z(r, z)$  – осевое перемещение точки  $(r, z)$  элемента относительно точки  $(a_1, 0)$  края ненагруженной части частично нагруженного внутреннего основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента;

$\sigma_r(r, z), \sigma_t(r, z), \sigma_z(r, z), \tau_{rz}(r, z)$  – радиальное, тангенциальное (окружное), осевое и сдвиговое напряжения в точке  $(r, z)$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента.

Только для свободного опирания или жёсткого защемления края известны поправки А. Лява [105], С. П. Тимошенко [165], А. И. Лурье [104] (отмечено, что боковая поверхность плиты значительно меньше её основания), А. С. Вольмира [58], С. А. Алексеева [3] к формулам теории пластин без исследования собственных погрешностей и пределов применимости.

Сопоставление этих расчётных схем с условиями опирания светопрозрачных элементов в действительных конструкциях иллюминаторов показывает, что к действительности ближе других четвёртая схема по теории пластин с равномерным противодействием на периферическую часть основания со свободной центральной частью, однако для этой схемы никаких известных уточнений не имеется и можно ожидать её пригодности лишь для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента, малой относительной толщины и неприемлемости четвёртой схемы по теории пластин для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента, большой относительной толщины, характерной для иллюминаторов для высоких давлений.

Правда, для самоуравновешенной равномерными давлениями круглой плиты при подобных граничных условиях известен метод И. Снеддона [143], основанный на преобразованиях Фурье. Однако условия на боковой поверхности И. Снеддон не рассматривает вовсе, откуда следует, что его метод едва ли даст уточнение по сравнению с теорией пластин.

К тому же в методе И. Снеддона утрачено такое преимущество решений по теории пластин, как простота. Например, для осевого перемещения метод И. Снеддона ведёт к формуле:

$$u_z(r, z) = - (p/E)z + (1 + \mu)(p/E)a_1 a / (a^2 - a_1^2) \int_0^{\infty} \zeta^{-1} [a_1 J_1(a\zeta) - a J_1(a_1\zeta)] J_0(\zeta r) \{ (\text{sh}\zeta h - \zeta h)^{-1} [- \zeta h / 2 \text{sh}(\zeta h / 2) \text{ch}(\zeta(z - h / 2)) - 2(1 - \mu) \text{ch}(\zeta h / 2) \text{ch}(\zeta(z - h / 2)) + \zeta(z - h / 2) \text{ch}(\zeta h / 2) \text{sh}(\zeta(z - h / 2))] + (\text{sh}\zeta h + \zeta h)^{-1} [\zeta h / 2 \text{ch}(\zeta h / 2) \text{sh}(\zeta(z - h / 2)) + 2(1 - \mu) \text{sh}(\zeta h / 2) \text{sh}(\zeta(z - h / 2)) - \zeta(z - h / 2) \text{sh}(\zeta h / 2) \text{ch}(\zeta(z - h / 2))] \} d\zeta$$
$$(J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i / [i!(i+n)!] (x/2)^{2i+n} -$$

функции Бесселя  $n$ -го порядка,  $n = 0, n = 1$ ). Использовать такое решение на практике не представляется возможным, не случайно сам И. Снеддон назвал его формальным.

В работе [79] предложен вывод результатов для толстой плиты при жёстком защемлении края из формул для пластины, рассмотрена эллиптическая и как частный случай круговая форма плиты, приведены формулы для изгибающих моментов и напряжений в центрах торцов и оценена погрешность теории тонких пластин.

В работе [78] рассмотрен расчёт изгиба плиты под действием собственного веса.

Некоторые известные решения задач теории плит не могут быть использованы для расчёта светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений ввиду несоответствия граничных условий, хотя и представляют интерес с методической точки зрения. Так, Б. Г. Галёркин [59, 60] сопоставил напряжённое состояние прямоугольной плиты, определённое по теориям пластин и плит, и сделал вывод о том, что теория пластин вполне применима для расчёта плит с отношением толщины к наименьшему другому размеру даже до 1/3. Однако из самой работы [59] и других изложенных здесь результатов следует, что этот вывод относится лишь к напряжениям, но не к прогибам. Что касается перемещений, то ещё раз отметим, что, как показал С. А. Алексеев [3] в анализе решения задачи об изгибе круглой плиты с жёстко защемлённым краем, поправка к стреле прогиба составляет 53 % величины, подсчитанной по

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 38/244

теории пластин, уже при отношении толщины к диаметру, равном 1/5 (поправка же к максимальным напряжениям в этом случае составляет 12 %).

Отметим, что авторы известных работ по теории плит [3, 48, 49, 78, 79, 83, 103–105, 127, 135, 164, 166, 182, 184] рассматривают их относительную (делённую на минимальный характерный размер основания) толщину большей, чем это характерно для теории пластин, но значительно меньшей, чем единица.

В целом с методической точки зрения интересны работы Б. Г. Галёркина [60], С. Г. Гутмана [78], А. И. Лурье [103, 104], В. К. Прокопова [127], Е. М. Круга [100], В. Т. Гринченко и А. Ф. Улитко [74, 75], В. И. Блоха [48, 49], М. А. Колтунова, Ю. Н. Васильева и В. А. Черных [94], В. Г. Рекача [135], Л. Г. Доннелла [83].

Специально посвящена исследованиям перемещений и напряжений в светопрозрачном элементе иллюминатора использующая метод Б. Н. Жемочкина [86] в теории плит, лежащих на упругом основании, работа В. Ф. Клёнова и др. [93].

Но и предложенная ими методика расчёта не рассматривает иллюминатор комплексно с учётом его оптических свойств, значительно уступает теории пластин в простоте, не учитывает трёхмерности светопрозрачных элементов и не пригодна для иллюминаторов высокого давления.

Правда, можно ожидать, что для таких иллюминаторов справедлив основанный на неприемлемых решениях вывод [124, 128] о малом влиянии напряжённого состояния в стеклоэлементах на показатели преломления, поскольку напряжения определяются используемыми в настоящее время методами с меньшими погрешностями, чем перемещения, а главное, потому, что речь идёт об изменениях этих показателей преломления, на три порядка меньших, чем они сами.

В целом следует отметить, что не имеется разработанных методик, пригодных для расчёта прочности, жёсткости и оптических свойств светопрозрачных элементов иллюминаторов как существенно трёхмерных тел, характерные толщины которых имеют один порядок с диаметрами. Более того, даже отсутствуют аналитические методы расчёта, которые могли бы лечь в основу таких методик.

Правда, в последние годы И. И. Дьячков, А. Л. Квитка и др. [85, 145–149] выполнили расчёты перемещений и напряжений в светопрозрачных элементах целого ряда конструкций иллюминаторов для высоких давлений по методу конечных элементов (МКЭ), при котором детально учтены граничные условия и существенная трёхмерность стеклоэлемента.

Эти расчёты представляют большой интерес, позволяют проанализировать каждую конструкцию в отдельности, показывают [146] неприемлемость известных решений для расчёта стеклоэлементов иллюминаторов для высоких давлений, однако не дают возможности оценить парциальное влияние каждого из конструктивных параметров, выделить главные из них и построить целевые функции для оптимизации конструкций иллюминаторов для высоких давлений.

Кроме того, из теории оптических систем известно [46], что для решения задачи выбора конструктивных параметров оптической системы необходимо знать непременно аналитические зависимости между значениями оптических искажений и конструктивными параметрами системы и что решение этой задачи представляет наибольшие трудности для создания новых оптических систем.

Поскольку в случае плоскопараллельных оптических поверхностей стеклоэлементов применяются универсальные гидрообъективы с известными конструктивными параметрами, то нужно определить аналитические зависимости оптических искажений от остальных существенных конструктивных параметров, которыми являются лишь искривления оптических поверхностей стеклоэлементов под действием внешнего давления.

Эти зависимости должны быть определены аналитически через конструктивные параметры иллюминатора для высоких давлений и через величину внешнего давления.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 39/244

Далее можно получить аналитические зависимости искажений оптической системы, включающей иллюминатор для высоких давлений и гидрообъектив, от внешнего давления, конструктивных параметров иллюминатора для высоких давлений и конструктивных параметров гидрообъектива.

Подстановка в эти зависимости значений рабочего давления, величин искажений и конструктивных параметров даёт аналитические зависимости между конструктивными параметрами самого иллюминатора для высоких давлений, то есть оптический аспект технической задачи защиты гидрообъектива от внешнего давления при обеспечении заданного качества изображения.

Что касается прочностного аспекта этой же задачи, то он решается с помощью аналитических зависимостей уже компонентов тензора напряжений в каждой точке светопрозрачного элемента как слабейшего звена иллюминатора для высоких давлений от его конструктивных параметров.

Определение равносильных (эквивалентных) напряжений по той или иной теории прочности (для хрупких материалов типа неорганического стекла представляются приемлемыми первая теория прочности, критерий Кулона–Мора и критерий Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева [69, 96, 123, 151]) приводит к известным предельным напряжениям для одноосных состояний или к допускаемым напряжениям, определяемым через предельные с помощью коэффициентов запаса. Аналогично исследуется жёсткостный аспект той же технической задачи.

Именно аналитические методы не только необходимы, но и обладают существенными преимуществами перед всеми иными методами, в том числе перед развивающимися численно-аналитическими методами, использованными в настоящей диссертации для представления непрерывных эпюр и изолиний перемещений и напряжений по дискретным численным данным метода конечных элементов.

Во-первых, именно и только аналитические методы отличаются от других методов, в том числе численно-аналитических, численных и экспериментальных методов, необходимой и крайне полезной для любых научных исследований полной и безусловной, чёткой и однозначной проверяемостью результатов.

Во-вторых, именно и только аналитические методы отличаются от других методов, в том числе численно-аналитических, численных и экспериментальных методов, необходимым и крайне полезным для любых научно-технических исследований непосредственным получением непременно аналитических зависимостей целевых параметров оптимизации именно от исходных параметров решаемой задачи.

Итак, для проектирования иллюминаторов для высоких давлений необходимы отсутствующие непременно аналитические методы решения задач механики, прочности и оптики существенно трёхмерных тел, в частности светопрозрачных элементов.

#### 1.4. Выводы по главе 1

1. Светопрозрачный элемент оптического иллюминатора для высоких давлений, удовлетворяющего высоким требованиям к качеству изображения и обеспечивающего использование универсальных гидрообъективов, представляет собой именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело (прямой круговой цилиндр) с плоскопараллельными оптическими поверхностями.

2. Для рационального проектирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, необходимы функциональные зависимости целевых параметров оптимизации от совокупностей исходных параметров, выраженные непременно в аналитической форме на основе разумного компромисса между простотой и точностью.

3. Аналитические методы, основанные на теории пластин и теории плит, неприемлемы для расчёта напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 40/244

сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента оптического иллюминатора для высоких давлений.

4. Для рационального проектирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента оптического иллюминатора для высоких давлений, необходимо создание общего аналитического метода для теорий деформирования, жёсткости и оптики, прочности и разрушения такого тела при нагружении равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на боковую поверхность и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания.

## **2. СОЗДАНИЕ ОБЩЕГО (ПОЛУ)СТЕПЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА МАКРОЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОБЩИХ ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ СПЛОШНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, В ЧАСТНОСТИ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

### **2.1. Выбор и обоснование основных расчётных схем осесимметричного нагружения без объёмных сил и кручения трёхмерных цилиндрических упругих тел, в частности светопрозрачных элементов, в технике высоких давлений**

В рациональной конструкции иллюминатора для высоких давлений поле зрения не должно сужаться, и потому давление внешней среды действует на всю поверхность внешнего основания светопрозрачного элемента. Если учесть нежелательность значительных силовых контактов стеклоэлементов с деталями из других материалов, то целесообразно удерживать светопрозрачный элемент в равновесии благодаря действию гидростатического давления соответствующей величины на кольцевую периферическую часть поверхности частично нагруженного внутреннего основания. В связи с малостью отношения пределов прочности неорганического стекла при растяжении и сжатии полезно обжатие стеклоэлемента гидростатическим давлением, приложенным к его боковой поверхности. При этом существует наилучшее значение отношения величины этого давления к величине внешнего давления, зависящее от конструктивных параметров иллюминатора и, вообще говоря, не равное единице. Удовлетворяющая этим требованиям конструкция иллюминатора для высоких давлений и схема нагружения его светопрозрачного элемента показаны на рис. 2.1. Отношения давлений на периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания и на боковую поверхность стеклоэлемента к внешнему давлению поддерживаются автоматически двумя двухступенчатыми поршнями соответствующих поперечных сечений. Существенными отличиями такого иллюминатора от конструкций с силовыми контактами стеклоэлементов с оправами являются отсутствие трения между ними и равномерное распределение давления

$$(2.1) \\ p_2 = pa^2/(a^2 - a_1^2)$$

на периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания стеклоэлемента. Применение приведённой расчётной схемы, не учитывающей особенностей взаимодействия стеклоэлементов с оправами и уплотнительными кольцами, ведёт к погрешностям, которые, как показано в дальнейшем путём сопоставления расчётных и экспериментальных результатов, невелики.



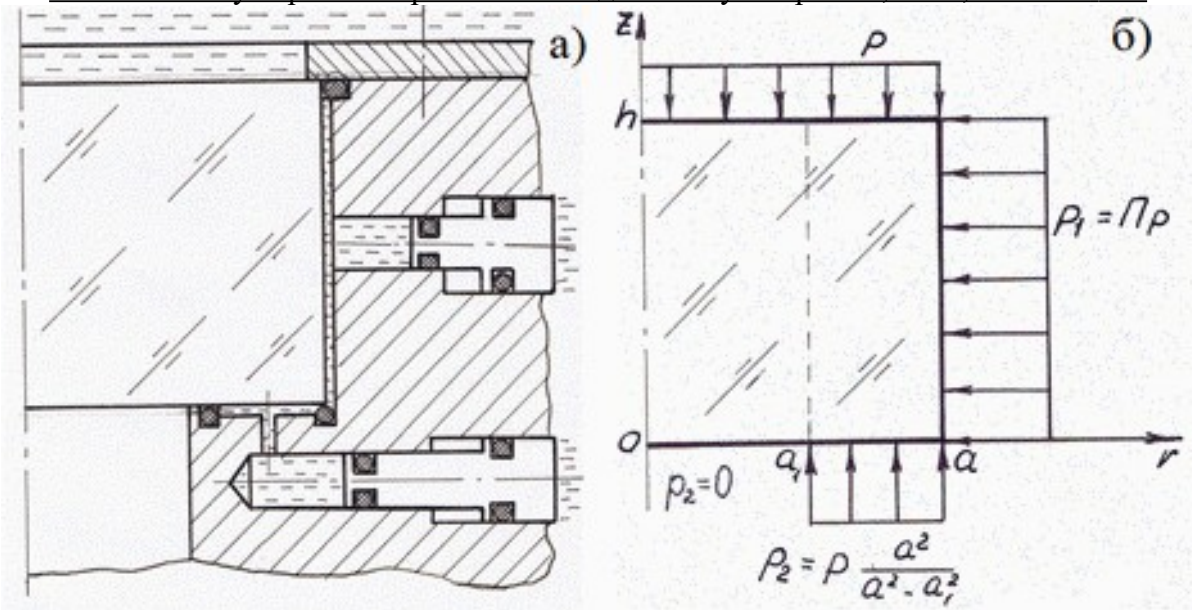


Рисунок 2.1. Рассматриваемая конструкция (а) иллюминатора для высоких давлений и схема нагружения (б) его светопрозрачного элемента.

Принятие условия (2.1) наряду с общепринятыми допущениями линейной теории упругости делает вполне определённым выбор расчётной схемы и позволяет изучить деформирование светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений независимо от его оправы и получить универсальное замкнутое решение методом функций напряжений Лява [105].

## 2.2. Общее степенное решение бигармонического уравнения и определение общей степенной бигармонической функции напряжений Лява для общего степенного решения общей осесимметричной задачи теории упругости без объёмных сил и кручения и для создания общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов

Определение напряжённо-деформированных состояний элементов конструкций обычно сводится к решению интегральных и/или дифференциальных (обыкновенных и в частных производных) уравнений, их так называемых систем (на самом деле множеств) и соответствующих краевых задач с начальными и/или граничными условиями [48, 49, 94, 104, 105, 117, 135, 164–166]. Обобщением их всех создана теория общих математических задач как множеств функциональных отношений (например уравнений или неравенств) с известными операторами над искомыми функциями известных аргументов.

Создана теория собственной совокупности видов (классов), в частности собственного вида (класса), функций для множества операторов. Если все функции (прообразы) и все значения каждого из операторов над этими функциями (образы) представимы единой совокупностью видов (классов) функций, множество операторов не выводит за её пределы, то множество операторов называется замкнутым относительно этой единой совокупности видов (классов) функций, она – собственной для множества операторов (глубокое обобщение неподвижной точки отображения); при единственности уравнения, оператора и функции собственная совокупность видов (классов) сводится к собственному виду (классу) функций для оператора, каждая из которых (прообраз) преобразуется им в функцию (образ) того же вида (класса), не обязательно пропорциональную прообразу, так что собственным видом (классом) функций для оператора обобщается собственная функция для оператора. Главное, в отличие от собственных функций, ортонормированных базисов и неортогональных фундаментальных решений, собственные виды (классы) функций для многих линейных операторов очевидны и дают общие решения систем функциональных уравнений в этих видах (классах) функций.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 42/244

Замечание. Анализ понятия собственной функции для оператора показывает, что оно является обобщением понятия неподвижной точки отображения, образ которой совпадает с ней как прообразом, причём эту точку следует понимать беспредельно общо, то есть не только как обычную геометрическую точку с нулевыми размерами, а как элемент области определения отображения. Тогда становится понятным, что собственная функция для оператора (добавление этого предлога предотвращает вполне возможное неверное её понимание как функции от оператора) есть обобщение неподвижной точки оператора, поскольку собственное значение оператора есть постоянная, не обязательно равная единице. Ведь по определению собственной функции для оператора оператор преобразует эту собственную функцию как прообраз в образ, равный произведению этой собственной функции на это собственное значение. Эти классические понятия и соответствующие методы и теории чрезвычайно полезны, особенно для исследований операторов. Однако собственные функции для операторов являются далеко не самыми простыми, так что разложения решений соответствующих уравнений по собственным функциям для операторов этих уравнений оказываются усложнёнными. Поэтому чрезвычайно полезно такое дальнейшее обобщение понятия неподвижной точки, что под ней понимается любое подмножество области определения отображения, которое преобразуется этим отображением само в себя (не обязательно на себя) и в этом смысле является собственным для этого отображения, тем самым не выходящим за пределы этого подмножества. В частном случае оператора как отображения функция-прообраз как элемент собственного (для этого оператора) множества, или класса, функций преобразуется этим оператором в некую функцию-образ как элемент этого же множества, или класса, причём образ не обязан быть ни пропорциональным (с постоянным числовым коэффициентом) прообразу, что свойственно собственной функции для оператора, ни тем более именно равным прообразу (с единичностью этого коэффициента), что свойственно обычной одноэлементной неподвижной точке. Следовательно, это обобщение понятия неподвижной точки отображения является также обобщением понятия собственной функции для оператора. В простейшем частном случае единственного уравнения как условия аннулирования единственного линейного оператора множество, или класс, всех степенных рядов как достаточно общих и достаточно простых функций очевидным образом является собственным множеством, или классом, функций для этого оператора, преобразующего любой степенной ряд в некий степенной ряд этого же множества, или класса, причём образ не обязан быть ни пропорциональным (с постоянным числовым коэффициентом) прообразу, что свойственно собственной функции для оператора, ни тем более именно равным прообразу (с единичностью этого коэффициента), что свойственно обычной одноэлементной неподвижной точке. В более общем указанном в диссертации частном случае системы функциональных уравнений собственной называется такая система множеств, или классов, функций, которая соответствующей системой операторов преобразуется в (не обязательно на) себя, то есть эта система операторов не выводит за пределы этой системы множеств, или классов, функций.

Полиномиальные методы решения упругих задач математически строго проанализированы и обобщены общим (полу)степенным методом, в частности общим (полу)степенным аналитическим методом макроэлементов, для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики нагруженных именно существенно трёхмерных тел.

Если собственный вид (класс) функций для множества операторов – вид (класс) степенных рядов как линейных комбинаций линейно независимых степенных координатных функций с неотрицательными целыми показателями, то получается созданный общий степенной метод, дающий именно общие решения системы функциональных уравнений в степенных рядах.

В осесимметричной задаче теории упругости без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат для точного выполнения всех уравнений равновесия и совместности деформаций достаточна бигармоничность функции напряжений Лява.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 43/244

Приложение общего степенного метода к решению бигармонического уравнения и через него осесимметричной упругой задачи без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат через бигармоническую функцию напряжений Лява основано на том, что класс степенных рядов – собственный для оператора бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 L(r, z) = (\partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + \partial^2 / \partial z^2)^2 L(r, z) = 0,$$

где  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + \partial^2 / \partial z^2$  – оператор Лапласа, с исходным общим видом решения

$$L(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} r^i z^j$$

при неопределённых числовых коэффициентах  $a_{ij}$  как искомым неизвестных параметрах.

Общий степенной метод даёт впервые достигаемое общее степенное представление

$$L(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} (2i+j-2)! [4i a_{1,2i+j-2} + (2i+j-1)(2i+j)(i-1) a_{0,2i+j}] r^{2i} z^j$$

осесимметричной бигармонической функции и, в частности, функции напряжений Лява в осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения через две простые числовые последовательности  $a_{0,2i+j}$  при чётном  $i$  и  $a_{1,2i+j-2}$  при нечётном  $i$ , конечное при конечности этих обеих числовых последовательностей (условно считаются  $1/(-1)! = 0$  и при  $M < 0$   $M! = 1$ ,  $a_{1M} = 0$ ). Проблема сходимости подобных рядов разрешима при конкретизации их и области определения и снимается при замене рядов конечными суммами в приближениях.

Дифференциальные операторы Лява дают формулы для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений в осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения:

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= (1 + \mu) E^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [(-1)^{i+1} (2i+j+1)! i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} a_{1,2i+j+1} + \\ &\quad (-1)^{i+1} (2i+j+3)! (i-1)!^{-1} (i+1)!^{-1} j!^{-1} 2^{-2i} a_{0,2i+j+3}] r^{2i+1} z^j; \\ u_z(r, z) &= (1 + \mu) E^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i i!^{-2} j!^{-1} [(i+2-2\mu)(2i+j)! 2^{-2i} a_{1,2i+j} + \\ &\quad (i+1-2\mu)(2i+j+2)! 2^{-2i} a_{0,2i+j+2}] r^{2i} z^j; \\ \sigma_r(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} \{4(2i+1-2\mu)(2i+j+1)! a_{1,2i+j+1} + \\ &\quad [2(i-\mu) - i/(i+1)](2i+j+3)! a_{0,2i+j+3}\} r^{2i} z^j; \\ \sigma_t(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} \{4(1-2\mu)(2i+j+1)! a_{1,2i+j+1} + \\ &\quad [(1-2\mu)i - 2\mu](i+1)^{-1} (2i+j+3)! a_{0,2i+j+3}\} r^{2i} z^j; \\ \sigma_z(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} [4(i+2-\mu)(2i+j+1)! a_{1,2i+j+1} + (i+1-\mu)(2i+j+3)! a_{0,2i+j+3}] r^{2i} z^j; \\ \tau_{rz}(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+1} i!^{-1} (i+1)!^{-1} j!^{-1} 2^{-2i} [4(i+2-\mu)(2i+j+2)! a_{1,2i+j+2} + \\ &\quad (i+1-\mu)(2i+j+4)! a_{0,2i+j+4}] r^{2i+1} z^j. \end{aligned}$$

Принципиальная новизна и практическая ценность общего (полу)степенного метода заключается в получении и применении именно общих решений задач в (полу)степенных рядах, в данном случае общего представления осесимметричной бигармонической функции, в том числе функции напряжений Лява или осевого напряжения, взамен ограниченных частных представлений. Новые возможности достигнутого общего представления подобны таковым при введении бесконечных рядов в дополнение к замкнутым алгебраическим суммам конечных множеств слагаемых.

По принципу наложения (суперпозиции) в линейной теории упругости можно отделить для дальнейшего учёта часть напряжённо-деформированного состояния трёхмерного цилиндрического тела (элемента) от действия давления  $p_1$  на боковую поверхность тела (элемента). Эта часть определяется решением Ламе для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений в сплошном цилиндре [104, 105]:

(2.2a)

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= - (1 - \mu) r p_1 / E; \\ u_z(r, z) &= 2\mu z p_1 / E; \\ \sigma_r(r, z) &= - p_1; \\ \sigma_t(r, z) &= - p_1; \\ \sigma_z(r, z) &= 0; \\ \tau_{rz}(r, z) &= 0. \end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 44/244

Остаётся определить напряжённо-деформированное состояние трёхмерного цилиндрического тела (элемента) при  $p_1 = 0$  (см. рис. 2.1).

Поскольку при  $r = a_1$  на внутреннем основании  $z = 0$  есть скачок осевого напряжения  $\sigma_z(r, z)$  и в решении этой задачи методом теории пластин [56, 179] приводятся различные выражения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$ , то в целях получения замкнутого аналитического решения представляется логичным мысленное рассечение сплошного трёхмерного цилиндрического тела соосной (коаксиальной) цилиндрической поверхностью  $r = a_1$  на круглую центральную часть радиусом  $a_1$  и кольцевую периферическую часть внутренним радиусом  $a_1$  и внешним радиусом  $a$ .

Смысл рассечения заключается в том, что будут построены решения отдельно для круглой центральной  $0 \leq r \leq a_1$  и кольцевой периферической  $a_1 \leq r \leq a$  частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела и последует сопряжение этих решений на поверхности  $r = a_1$ .

Для упрощения используются безразмерные величины

(2.2б)

$$\rho = r/h;$$

$$\zeta = z/h;$$

$$b = a_1/h;$$

$$c = a/h;$$

$$u_\rho(\rho, \zeta) = u_r(r, z)(1 + \mu)^{-1}E/(ph);$$

$$u_\zeta(\rho, \zeta) = u_z(r, z)(1 + \mu)^{-1}E/(ph);$$

$$\sigma_\rho(\rho, \zeta) = \sigma_r(r, z)/p;$$

$$\sigma_\varphi(\rho, \zeta) = \sigma_t(r, z)/p;$$

$$\sigma_\zeta(\rho, \zeta) = \sigma_z(r, z)/p;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = \tau_{rz}(r, z)/p;$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = L(r, z)/(ph^3) = L(h\rho, h\zeta)/(ph^3),$$

где

$L(r, z)$  – бигармоническая размерная функция напряжений Лява [105];

$\Lambda(\rho, \zeta)$  – бигармоническая безразмерная функция напряжений Лява.

Оператор Лапласа принимает безразмерный вид

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial\rho^2 + \rho^{-1}\partial/\partial\rho + \partial^2/\partial\zeta^2.$$

Безразмерные перемещения и напряжения выражаются через бигармоническую

$$\nabla^2\nabla^2\Lambda(\rho, \zeta) = 0$$

безразмерную функцию напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  с помощью линейных дифференциальных операторов:

(2.3)

$$u_\rho(\rho, \zeta) = -\partial^2\Lambda(\rho, \zeta)/(\partial\rho\partial\zeta);$$

$$u_\zeta(\rho, \zeta) = (2(1 - \mu)\nabla^2 - \partial^2/\partial\zeta^2)\Lambda(\rho, \zeta);$$

$$\sigma_\rho(\rho, \zeta) = (\partial/\partial\zeta)(\mu\nabla^2 - \partial^2/\partial\rho^2)\Lambda(\rho, \zeta);$$

$$\sigma_\varphi(\rho, \zeta) = (\partial/\partial\zeta)(\mu\nabla^2 - \rho^{-1}\partial/\partial\rho)\Lambda(\rho, \zeta);$$

$$\sigma_\zeta(\rho, \zeta) = (\partial/\partial\zeta)((2 - \mu)\nabla^2 - \partial^2/\partial\zeta^2)\Lambda(\rho, \zeta);$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = (\partial/\partial\rho)((1 - \mu)\nabla^2 - \partial^2/\partial\zeta^2)\Lambda(\rho, \zeta).$$

Условия равновесия и совместности деформаций выполняются тождественно благодаря условию бигармоничности безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ .

Остаётся удовлетворить этому условию и граничным условиям:

(2.4)

$$\nabla^2\nabla^2\Lambda(\rho, \zeta) = 0;$$

$$\sigma_\rho(c, \zeta) = 0;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(c, \zeta) = 0;$$

$$\sigma_\zeta(\rho, 0) = 0, 0 \leq \rho < b;$$

$$\sigma_\zeta(\rho, 0) = -p_2/p = -a^2/(a^2 - a_1^2), b \leq \rho \leq c;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) = 0;$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta}(\rho, 1) &= -1; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) &= 0; \\ u_{\rho}(b - 0, \zeta) &= u_{\rho}(b + 0, \zeta); \\ u_{\zeta}(b - 0, \zeta) &= u_{\zeta}(b + 0, \zeta); \\ \sigma_{\rho}(b - 0, \zeta) &= \sigma_{\rho}(b + 0, \zeta); \\ \sigma_{\varphi}(b - 0, \zeta) &= \sigma_{\varphi}(b + 0, \zeta); \\ \sigma_{\zeta}(b - 0, \zeta) &= \sigma_{\zeta}(b + 0, \zeta); \\ \tau_{\rho\zeta}(b - 0, \zeta) &= \tau_{\rho\zeta}(b + 0, \zeta).\end{aligned}$$

Известные замкнутые решения теории пластин и теории плит и общий степенной метод обобщаются общим полустепенным методом с любыми конечными разложениями функций напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для круглой центральной и кольцевой периферической частей (сплошного центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов) по любому числу неотрицательных степеней любой из двух асимметричных переменных осесимметричной задачи теории упругости с коэффициентами в виде совершенно произвольных четырежды дифференцируемых функций другой переменной.

Таковы два принципиально разных вида представлений функций напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ :

$$(2.5)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\zeta) \rho^i,$$

$$(2.6)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n g_i(\rho) \zeta^i.$$

Рассмотрим вначале представление (2.5). Условие бигармоничности

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = f_1(\zeta) \rho^3 + [2(\partial^2/\partial \zeta^2) f_1(\zeta) + 9f_3(\zeta)] \rho^1 + \sum_{i=0}^n [(\partial^4/\partial \zeta^4) f_i(\zeta) + 2(i+2)^2 (\partial^2/\partial \zeta^2) f_{i+2}(\zeta) + (i+2)^2 (i+4)^2 f_{i+4}(\zeta)] \rho^i = 0,$$

в котором тождественно по  $\zeta$

$$f_i(\zeta) = 0 \quad (i > n),$$

приводит движением от меньших  $n$  к большим к тождественному аннулированию  $f_i(\zeta)$  с нечётными индексами:

$$f_1(\zeta) = f_3(\zeta) = f_5(\zeta) = \dots = f_{2[(n-1)/2]+1}(\zeta) = 0,$$

где  $[x]$  – целая часть действительного числа  $x$ .

Заменяя  $[n/2]$  на  $n$ , получаем из (2.5) менее общее представление

$$(2.7)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\zeta) \rho^{2i}.$$

Опять-таки из условия бигармоничности, но в отличие от предыдущего случая двигаясь от больших  $n$  к меньшим, получаем условие

$$(\partial^4/\partial \zeta^4) f_n(\zeta) = 0,$$

откуда  $f_n(\zeta)$  – произвольный многочлен третьей степени от  $\zeta$ ; затем выясняем, что  $f_{n-1}(\zeta)$  – произвольный многочлен пятой степени от  $\zeta$ , и т. д. То есть  $f_i(\zeta)$  – произвольный многочлен степени  $2n + 3 - 2i$  от  $\zeta$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). В конечном счёте  $f_0(\zeta)$  – произвольный многочлен степени  $2n + 3$  от  $\zeta$ . Так что из (2.7) получаем ещё менее общее представление

$$(2.8)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n+3-2i} a_{ij} \zeta^j.$$

Заметим, что мы до сих пор пользовались лишь некоторыми следствиями бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$ , в то время как она не только приводит дедуктивно от представления (2.5) к представлению (2.8), но и накладывает на коэффициенты  $a_{ij}$  представления (2.8) линейные зависимости согласно тождеству по  $\rho$  и  $\zeta$ :

$$(2.9)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n+1-2i} [(j+1)(j+2)(j+3)(j+4) a_{i,j+4} + 8(i+1)^2 (j+1)(j+2) a_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2 (i+2)^2 a_{i+2,j}] \zeta^j = 0.$$

Переходим теперь к выполнению граничных условий (2.4) и попытаемся удовлетворить первым двум из них – тождествам по  $\zeta$ :

$$\sigma_{\rho}(c, \zeta) = 0;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(c, \zeta) = 0.$$

Представление (2.8) даёт

$$(2.10)$$

$$\sigma_{\rho}(c, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} c^{2i} \sum_{j=1}^{2n+1-2i} \{ [4(i+1)^2 j \mu - (2i+2)(2i+1)j] a_{i+1,j} + (j+2)(j+1)j \mu a_{i,j+2} \} \zeta^{j-1} = 0;$$

$$(2.11)$$

$$\tau_{\rho\zeta}(c, \zeta) = \sum_{i=1}^n c^{2i-1} \sum_{j=0}^{2n+1-2i} [8i(i+1)^2(1-\mu)a_{i+1,j} - 2i(j+1)(j+2)\mu a_{i,j+2}] \zeta^j = 0.$$

Для точного выполнения условия бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$  и граничных условий на боковой поверхности  $\rho = c$  коэффициенты  $a_{ij}$  представления (2.8) должны удовлетворять системе из трёх групп линейных зависимостей согласно тождествам (2.9) – (2.11).

В частности, тождество (2.9) при  $i = n - 1, j = 0$  даёт

$$24a_{n-1,4} + 16n^2 a_{n2} = 0,$$

откуда

$$a_{n-1,4} = - (2/3)n^2 a_{n2}.$$

Последовательное в порядке убывания  $i$  рассмотрение тождества (2.9) при

$$i = n - k, j = 2k + 2 \quad (k = 2, 3, 4, \dots, n)$$

ведёт к строго доказываемым по методу математической индукции редукционным формулам по  $j$ :

$$(2.12)$$

$$a_{n-k,2k+2} = (-1)^k 2^{2k} / (2k+1)! n!^2 / (n-k)!^2 a_{n2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Выражение (2.11) при  $i = 1, j = 2n - 2$  приводит к соотношению

$$32(1-\mu)a_{2,2n-2} - 2(2n-1)2n\mu a_{1,2n} = 0,$$

которое совместно с (2.12) при  $k = n - 2$  и  $k = n - 1$  даёт

$$a_{n2} = 0.$$

С учётом (2.12)

$$(2.13)$$

$$a_{n-k,2k+2} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Последовательное (в порядке убывания  $i$ ) рассмотрение тождества (2.9) при

$$i = n - k, j = 2k + 3 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

приводит к редукционным по  $j$  формулам

$$a_{n-k,2k+3} = (-1)^k 3! 2^{2k} (k+1) / (2k+3)! n!^2 / (n-k)!^2 a_{n3} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Затем из (2.11) при  $i = 1, j = 2n - 1$  получаем  $a_{n3} = 0$ , так что

$$(2.14)$$

$$a_{n-k,2k+3} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Совершенно аналогично приходим к соотношениям

$$a_{n-k,2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n);$$

$$a_{n-k,2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

которые совместно с (2.13) и (2.14) ведут к редукции  $n$  в представлении (2.8) и в конечном счёте к тождеству  $\Lambda(\rho, \zeta) = 0$ , что в принципе не позволяет выполнить граничные условия на основаниях.

Тем самым строго доказано, что граничные условия на боковой поверхности независимо от условий на основаниях не могут быть выполнены точно.

Отсюда следует, что возможны лишь приближённые замкнутые аналитические решения задачи с условиями (2.4) и что принятым граничным условиям на боковой поверхности при условии бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$  можно удовлетворить лишь приближённо (осуществимо лишь плоско точное неплюско приближённое выполнение граничных условий).

Представляется логичным при сохранении условия бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$  изучить возможность точного выполнения граничных условий (2.4) на основаниях ( $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$ ).

Из (2.8) благодаря (2.3) получаем:

$$\sigma_{\zeta}(\rho, \zeta) = 6(1-\mu)a_{n3}\rho^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} [4(i+1)^2(j+1)(2-\mu)a_{i+1,j+1} + (j+1)(j+2)(1-\mu)a_{i,j+3}] \zeta^j;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = -\rho^{2n-1}(4n\mu a_{n2} + 12n\mu a_{n3}\zeta) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho^{2i-1} \sum_{j=0}^{2n+1-2i} [8i(i+1)^2(1-\mu)a_{i+1,j} - 2i(j+1)(j+2)\mu a_{i,j+2}] \zeta^j.$$

Тождества (2.4) по  $\rho$

$$\begin{aligned}\tau_{r\zeta}(\rho, 0) &= 0, \\ \tau_{r\zeta}(\rho, 1) &= 0\end{aligned}$$

дают

$$\begin{aligned}a_{n2} &= 0, \\ a_{n3} &= 0,\end{aligned}$$

Тождества (2.4) по  $\rho$

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta}(\rho, 0) &= -p_2/\rho, \quad b \leq r \leq c, \\ \tau_{r\zeta}(\rho, 1) &= 0\end{aligned}$$

при  $i = n - 1$  дают систему соотношений

$$\begin{aligned}4n^2(2 - \mu)a_{n1} + 2(1 - \mu)a_{n-1,3} &= 0, \\ 4n^2(1 - \mu)a_{n1} - 6\mu a_{n-1,3} &= 0\end{aligned}$$

с ненулевым главным определителем, откуда

$$\begin{aligned}a_{n1} &= 0, \\ a_{n-1,3} &= 0.\end{aligned}$$

Теперь путём последовательного применения (2.9) приходим к условиям

$$\begin{aligned}a_{n-k,2k+1} &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n), \\ a_{n-k,2k+2} &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n), \\ a_{n-k,2k+3} &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),\end{aligned}$$

что ведёт к понижению степеней многочленов  $f_i(\zeta)$  на три в представлении (2.8):

$$(2.15)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} a_{ij} \zeta^j.$$

Заметим, что представление (2.15) получено чисто дедуктивным путём из (2.5)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\zeta) \rho^i.$$

Теперь рассмотрим (2.6)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n g_i(\rho) \zeta^i$$

как другую разновидность представления безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ .

Условие её бигармоничности

$$\begin{aligned}\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) &= \sum_{i=0}^n \{ (\partial^4 / \partial \rho^4) g_i(\rho) + 2\rho^{-1} (\partial^3 / \partial \rho^3) g_i(\rho) - \rho^{-2} (\partial^2 / \partial \rho^2) g_i(\rho) + \rho^{-3} (\partial / \partial \rho) g_i(\rho) + 2(i+1)(i+2) \\ &[(\partial^2 / \partial \rho^2) g_{i+2}(\rho) + \rho^{-1} (\partial / \partial \rho) g_{i+2}(\rho)] + (i+1)(i+2)(i+3)(i+4) g_{i+4}(\rho) \} \zeta^i = 0,\end{aligned}$$

в котором теперь тождественно по  $\rho$

$$g_i(\rho) = 0 \quad (i > n),$$

ведёт к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $g_i(\rho)$ .

Последовательное (в направлении убывания  $i$ ) её решение даёт

$$g_i(\rho) = \sum_{j=0}^{1+(n-i)/2} (a_{ij} \rho^{2j} + b_{ij} \rho^{2j} \ln \rho) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

где и далее

$$[(n-i)/2]$$

есть обозначенная с помощью квадратных скобок целая часть числа

$$(n-i)/2.$$

Преобразуем полученное представление:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \zeta^i \sum_{j=0}^{1+(n-i)/2} (a_{ij} \rho^{2j} + b_{ij} \rho^{2j} \ln \rho) = \sum_{j, i \geq 0}^{2j+i \leq n+2} (a_{ij} \rho^{2j} + b_{ij} \rho^{2j} \ln \rho) \zeta^i.$$

Меняя ролями  $i$  и  $j$ , а также заменяя  $n+1$  на  $n$ , получаем

$$(2.16)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{2n-2i} (a_{ij} \rho^{2i} + b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho) \zeta^j = \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} (a_{ij} + b_{ij} \ln \rho) \zeta^j.$$

Нетрудно видеть, что представление (2.16) более общее, чем (2.15), получаемое в случае

$$b_{ij} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2i).$$

Поэтому представления (2.5) и (2.6) сводятся к единому представлению (2.16).

Изложенное выше относится и к круглой центральной, и к кольцевой периферической частям. Они различаются тем, что в центральной части  $\rho$  может обращаться в нуль, а в кольцевой периферической части  $\rho$  не может обращаться в нуль.

Ввиду представления (2.16) можно ожидать, что для центральной части все  $b_{ij}$  обращаются в нуль:

$$b_{ij} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2i), -$$

и представление (2.16) сводится к представлению (2.15).

Строгое доказательство таково.

Тождество по  $\zeta$

$$u_p(0, \zeta) = 0$$

даёт тождество по  $\zeta$

$$\sum_{j=1}^{2n} b_{0j} \zeta^{j-1} = 0,$$

откуда

$$b_{0j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n).$$

Конечность  $u_\zeta(0, \zeta)$  приводит к равенствам

$$(j + 1)(j + 2)(1 - 2\mu)b_{0,j+2} + 8(1 - \mu)b_{1j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2,$$

которые вместе с предыдущими позволяют найти

$$b_{1j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2).$$

Наконец, условия бигармоничности

$$(j + 1)(j + 2)(j + 3)(j + 4)b_{i,j+4} + 8(i + 1)^2(j + 1)(j + 2)b_{i+1,j+2} + 16(i + 1)^2(i + 2)^2b_{i+2,j} = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n - 2; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 4 - 2i)$$

устанавливают:

при  $i = 0; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 4$

$$b_{2j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 4;$$

при  $i = 1; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 6$

$$b_{3j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 6;$$

и так далее, наконец,

при  $i = n - 2; j = 0$

$$b_{n0} = 0.$$

Следовательно, для центральной части трёхмерного сплошного цилиндрического тела

$$\Lambda(\rho, \zeta) = b_{00} \ln \rho + \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} a_{ij} \zeta^j.$$

Однако первое слагаемое  $b_{00} \ln \rho$  не сохраняется дифференциальными операторами (2.3) и не влияет на перемещения и напряжения, поэтому его можно опустить без всякого ограничения общности.

В итоге действительно получаем, что безразмерная функция напряжений  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для круглой центральной части трёхмерного сплошного цилиндрического тела имеет вид (2.15).

Для кольцевой периферической же части трёхмерного сплошного цилиндрического тела эти соображения не имеют места и должно использоваться более общее представление (2.16).

Продолжим совместное рассмотрение круглой центральной и кольцевой периферической частей трёхмерного сплошного цилиндрического тела и установим степени представления (2.16).

Обозначим

$$(2.17)$$

$$n(a) = \max \{i: a_{i0} \neq 0\},$$

$$(2.18)$$

$$n(b) = \max \{i: b_{i0} \neq 0\},$$

так что в (2.16)

$$a_{ij} = 0, \quad 2i + j > 2n(a),$$

$$b_{ij} = 0, \quad 2i + j > 2n(b).$$

Нет оснований требовать равенства

$$n(a) = n(b),$$

что привело бы к ограничению общности.

Представление (2.16) с учётом обозначений (2.17) и (2.18) может быть выражено и так:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n(a)} \sum_{j=0}^{2n(a)-2i} a_{ij} \rho^{2i} \zeta^j + \sum_{i=0}^{n(b)} \sum_{j=0}^{2n(b)-2i} b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho \zeta^j.$$

Однако пока удобнее равносильно пользоваться самим представлением (2.16) при вытекающих из обозначений (2.17) и (2.18) дополнительных условиях



$$a_{ij} = 0, 2i + j > 2n(a),$$

$$b_{ij} = 0, 2i + j > 2n(b).$$

Представление (2.16) применительно к условию бигармоничности и граничным условиям на основаниях даёт:

$$(2.19)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{2n-4-2i} \{ [(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)a_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2a_{i+2,j} + 8(i+1)(j+2)b_{i+1,j+2} + 16(i+1)(i+2)(2i+3)b_{i+2,j}] \rho^{2i} + [(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)b_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)b_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2b_{i+2,j}] \rho^{2i} \ln \rho \} \zeta^j;$$

$$\sigma_\zeta(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{2n-3-2i} \{ [(1-\mu)(j+1)(j+2)(j+3)a_{i,j+3} + 4(2-\mu)(i+1)^2(j+1)a_{i+1,j+1} + 4(2-\mu)(i+1)(j+1)b_{i+1,j+1}] \rho^{2i} + [(1-\mu)(j+1)(j+2)(j+3)b_{i,j+3} + 4(2-\mu)(i+1)^2(j+1)b_{i+1,j+1}] \rho^{2i} \ln \rho \} \zeta^j;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2n-2-2i} \{ [-2\mu i(j+1)(j+2)a_{i,j+2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2a_{i+1,j} - \mu(j+1)(j+2)b_{i,j+2} + 4(1-\mu)(i+1)(3i+1)b_{i+1,j}] \rho^{2i-1} + [-2\mu i(j+1)(j+2)b_{i,j+2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2b_{i+1,j}] \rho^{2i-1} \ln \rho \} \zeta^j.$$

Рассмотрим вначале в каждой из правых частей последних трёх равенств выражения во вторых квадратных скобках (не содержащие коэффициентов вида  $a_{ij}$ ).

Из условий бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$  и постоянств осевого  $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений на обоих торцах  $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$

$$\sigma_\zeta(\rho, 0) = \text{constant};$$

$$\sigma_\zeta(\rho, 1) = \text{constant};$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) = \text{constant};$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) = \text{constant}$$

получим:

$$(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)b_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)b_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2b_{i+2,j} = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n(b) - 2; j = 0, 1, 2, \dots, 2n(b) - 4 - 2i);$$

$$6(1-\mu)b_{i3} + 4(2-\mu)(i+1)^2b_{i+1,1} = 0 (i = 0, 1, 2, \dots, n(b) - 2);$$

$$\sum_{j=1}^{2n(b)-3-2i} [(1-\mu)(j+1)(j+2)(j+3)b_{i,j+3} + 4(2-\mu)(i+1)^2(j+1)b_{i+1,j+1}] = 0 (i = 0, 1, 2, \dots, n(b) - 2);$$

$$-4\mu ib_{i2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2b_{i+1,0} = 0 (i = 1, 2, 3, \dots, n(b) - 1);$$

$$\sum_{j=1}^{2n(b)-2-2i} [-2\mu i(j+1)(j+2)b_{i,j+2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2b_{i+1,j}] = 0 (i = 1, 2, 3, \dots, n(b) - 2).$$

Легко доказать методом математической индукции две формулы, обеспечивающие редукцию по  $j$ :

$$b_{i,2k} = (-1)^{k+1} 2^{2k} / (2k)! (i+k)!^2 / i!^2 (k-\mu) / \mu b_{i+k,0} (i = 0, 1, 2, \dots, n(b); k = 0, 1, 2, \dots, n(b) - i);$$

$$b_{i,2k+1} = (-1)^k 2^{2k} / (2k+1)! (i+k)!^2 / i!^2 (k+1-\mu) / (1-\mu) b_{i+k,1}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n(b) - 1; k = 0, 1, \dots, n(b) - 1 - i).$$

Применение их даёт:

$$\mu^{-1} \sum_{k=3}^{n(b)-i} (-1)^k 2^{2k} / (2k-3)! (i+k)!^2 (k-2) b_{i+k,0} + (1-\mu)^{-1} \sum_{k=2}^{n(b)-1-i} (-1)^{k+1} 2^{2k-1} / (2k-3)! (i+k)!^2 b_{i+k,1} = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n(b) - 3);$$

$$\mu^{-1} \sum_{k=2}^{n(b)-i} (-1)^k 2^{2k-1} / (2k-3)! (i+k)!^2 b_{i+k,0} + (1-\mu)^{-1} \sum_{k=1}^{n(b)-1-i} (-1)^{k+1} 2^{2k} / (2k-1)! (i+k)!^2 b_{i+k,1} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n(b) - 2).$$

Если  $n(b) \geq 3$ , то эти соотношения при  $i = n(b) - 3$  и  $i = n(b) - 2$  соответственно приводят к системе линейных однородных уравнений

$$(2.20b)$$

$$32/3 \mu^{-1} n^2(b) b_{n(b)0} + 8(1-\mu)^{-1} b_{n(b)-1,1} = 0;$$

$$8\mu^{-1} n^2(b) b_{n(b)0} + 4(1-\mu)^{-1} b_{n(b)-1,1} = 0$$

с ненулевым главным определителем, откуда

$$b_{n(b)0} = 0$$

вопреки принятому определению (2.18) числа  $n(b)$ .

Следовательно, методом от противоречащего доказано, что

$$n(b) \leq 2.$$

Следует отметить, что при выполнении этого неравенства верхние пределы суммирования в соотношении, приводящем к первому из уравнений системы (2.20b), оказываются меньше нижних, левая часть этого уравнения аннулируется и противоречие исчезает.

Допустим, что  $n(a) \geq 4$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 50/244

Рассмотрим теперь те из выражений в первых квадратных скобках трёх последних равенств (2.19) для  $\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta)$ ,  $\sigma_{\zeta}(\rho, \zeta)$ ,  $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$ , где встречаются лишь коэффициенты вида  $b_{ij}$  при  $2i + j > 4$  (все они равны нулю ввиду установленного ограничения  $n(b) \leq 2$ ) и поэтому остаются лишь коэффициенты вида  $a_{ij}$ .

Система уравнений относительно коэффициентов вида  $a_{ij}$  такова:

$$\begin{aligned} & (j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)a_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2a_{i+2,j} = 0 \\ & \quad (i=0, 1, \dots, n(a)-2; 0 \leq j=3-2i, 4-2i, \dots, 2n(a)-4-2i); \\ & \quad 6(1-\mu)a_{i3} + 4(2-\mu)(i+1)^2a_{i+1,1} = 0 \quad (i=2, 3, \dots, n(a)-2); \\ & \sum_{j=1}^{2n(a)-3-2i} [(1-\mu)(j+1)(j+2)(j+3)a_{i,j+3} + 4(2-\mu)(i+1)^2(j+1)a_{i+1,j+1}] = 0 \quad (i=2, 3, \dots, n(a)-2); \\ & \quad -4\mu ia_{i2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2a_{i+1,0} = 0 \quad (i=3, 4, \dots, n(a)-1); \\ & \sum_{j=1}^{2n(a)-2-2i} [-2\mu i(j+1)(j+2)a_{i,j+2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2a_{i+1,j}] = 0 \quad (i=2, 3, \dots, n(a)-2). \end{aligned}$$

По методу математической индукции устанавливаем подобные предыдущим для коэффициентов  $b_{ij}$  с дополнительным естественным увеличением нижних пределов для  $i$  две формулы для коэффициентов  $a_{ij}$ , обеспечивающие редукцию по  $j$ :

$$\begin{aligned} a_{i,2k} &= (-1)^{k+1} 2^{2k} / (2k)! (i+k)!^2 / i!^2 (k-\mu) / \mu a_{i+k,0} \quad (i=3, 4, \dots, n(a)-1; k=0, 1, 2, \dots, n(a)-i); \\ a_{i,2k+1} &= (-1)^k 2^{2k} / (2k+1)! (i+k)!^2 / i!^2 (k+1-\mu) / (1-\mu) a_{i+k,1} \\ & \quad (i=2, 3, \dots, n(a)-2; k=0, 1, 2, \dots, n(a)-1-i). \end{aligned}$$

Получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \sum_{k=3}^{n(a)-i} (-1)^k 2^{2k} / (2k-3)! (i+k)!^2 (k-2) a_{i+k,0} + (1-\mu)^{-1} \sum_{k=2}^{n(a)-1-i} (-1)^{k+1} 2^{2k-1} / (2k-3)! (i+k)!^2 a_{i+k,1} &= 0 \\ & \quad (i=1, 2, 3, \dots, n(a)-3); \\ \mu^{-1} \sum_{k=2}^{n(a)-i} (-1)^k 2^{2k-1} / (2k-3)! (i+k)!^2 a_{i+k,0} + (1-\mu)^{-1} \sum_{k=1}^{n(a)-1-i} (-1)^{k+1} 2^{2k} / (2k-1)! (i+k)!^2 a_{i+k,1} &= 0 \\ & \quad (i=1, 2, \dots, n(a)-2). \end{aligned}$$

Принимая в них соответственно  $i = n(a) - 3$  и  $i = n(a) - 2$ , приходим к системе линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} & (2.20a) \\ & 32/3 \mu^{-1} n^2(a) a_{n(a)0} + 8(1-\mu)^{-1} a_{n(a)-1,1} = 0; \\ & 8\mu^{-1} n^2(a) a_{n(a)0} + 4(1-\mu)^{-1} a_{n(a)-1,1} = 0 \end{aligned}$$

с ненулевым главным определителем, откуда  $a_{n(a)0} = 0$  вопреки принятому определению (2.17) числа  $n(a)$ .

Следовательно, методом от противоречащего доказано, что

$$n(a) \leq 3.$$

Следует отметить, что при выполнении этого неравенства верхние пределы суммирования в соотношении, приводящем к первому из уравнений системы (2.20a), оказываются меньше нижних, левая часть этого уравнения аннулируется и противоречие исчезает.

То есть в разложении бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  отсутствуют слагаемые с  $\rho$  более чем в шестой степени и содержащие  $\ln \rho$  слагаемые с  $\rho$  более чем в четвертой степени.

В итоге из представлений (2.5) и (2.6) получаем следующие два равносильных вида бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ :

$$(2.21) \quad \Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} a_{ij} \rho^{2i} \zeta^j + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^{4-2i} b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho \zeta^j,$$

или

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} (a_{ij} \rho^{2i} + b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho) \zeta^j \quad (b_{ij} = 0 \text{ при } 2i + j > 4),$$

открывающие путь к полному удовлетворению условию бигармоничности и граничным условиям на плоскопараллельных основаниях круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (сплошного центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов).

Итак, из весьма общих представлений (2.5) и (2.6) чисто дедуктивно получены виды бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для сплошного центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов, на торцы (плоские основания) которых действуют нормальные равномерно распределённые

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 51/244

усилия. Коэффициенты видов  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  выбираются в соответствии с этими усилиями и условиями на боковых поверхностях. Ясно, что такое представление, вообще говоря, не позволяет обеспечить точное удовлетворение любых наперёд заданных граничных условий на боковых поверхностях. Поэтому в конкретных задачах эти условия удовлетворяются приближённо, а именно с точностью до невязок, аналогичных невязкам сопряжения по Л. Б. Цвику [172]. Поскольку граничные условия на торцах (плоских основаниях) выполняются точно, то погрешности решения в целом характеризуются невязками на боковых поверхностях, подлежащими минимизации.

Прежде чем переходить к решению конкретных задач, выявим различия в функциях напряжений для сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических элементов.

Поскольку в сплошном трёхмерном цилиндрическом элементе компоненты напряжённо-деформированного состояния непрерывны на оси, то можно ожидать, что в представлении для сплошного трёхмерного цилиндрического элемента должны отсутствовать неалгебраические слагаемые, содержащие  $\ln r$  (то есть все коэффициенты вида  $b_{ij} = 0$ ), так что функция напряжений Лява оказывается степенной. Это доказано выше вполне строго.

Для кольцевого трёхмерного цилиндрического элемента эти соображения не имеют места и требуется рассматривать более общие полученные представления с неалгебраическими слагаемыми с  $\ln r$  (так что функция напряжений Лява оказывается полустепенной). Необходимость их учёта подсказывается известными решениями для кольцевых пластин.

Решения же и для круглой пластины, опёртой по окружности меньшего радиуса либо на широкое кольцо с равномерным противодавлением, показывают, что и для таких случаев опирания светопрозрачного элемента понадобится исходить из общего полустепенного представления (2.21) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ .

Выше определены исходные виды бигармонических безразмерных функций напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических элементов. Результаты получены дедуктивно, причём лишь из частичного использования бигармоничности и граничных условий на торцах (плоских основаниях).

Оставив пока открытым вопрос о граничных условиях на боковых поверхностях, определим бигармонические функции напряжений Лява для сплошного (рис. 2.2, а) и кольцевого (рис. 2.2, б) трёхмерных цилиндрических элементов, именно полностью удовлетворяющие граничным условиям на торцах (плоских основаниях).

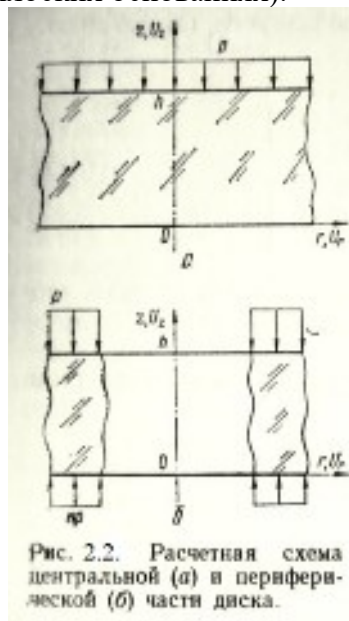


Рис. 2.2. Расчетная схема центральной (а) и периферической (б) части диска.

Рисунок 2.2. Расчётная схема круглой центральной (а) и кольцевой периферической (б) частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

### 2.3. Определение общей степенной бигармонической безразмерной функции напряжений Лява для сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов

В соответствии с изложенным выше для сплошного трёхмерного цилиндрического тела и для круглой центральной части сплошного трёхмерного цилиндрического тела исходным является полученное представление (2.21) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  при аннулировании всех коэффициентов вида  $b_{ij}$  ( $b_{ij} = 0$ ):

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} a_{ij} \rho^{2i} \zeta^j.$$

По соображениям удобства и наглядности приведём развёрнутую его запись:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 + a_{03}\zeta^3 + a_{04}\zeta^4 + a_{05}\zeta^5 + a_{06}\zeta^6 + \rho^2(a_{10} + a_{11}\zeta + a_{12}\zeta^2 + a_{13}\zeta^3 + a_{14}\zeta^4) + \rho^4(a_{20} + a_{21}\zeta + a_{22}\zeta^2) + \rho^6 a_{30}.$$

Получаем

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = (24a_{04} + 16a_{12} + 64a_{20}) + (120a_{05} + 48a_{13} + 64a_{21})\zeta + (360a_{06} + 96a_{14} + 64a_{22})\zeta^2 + \rho^2(24a_{14} + 64a_{22} + 576a_{30});$$

$$\sigma_{\zeta}(\rho, \zeta) = [4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03}] + [8(2 - \mu)a_{12} + 24(1 - \mu)a_{04}]\zeta + [12(2 - \mu)a_{13} + 60(1 - \mu)a_{05}]\zeta^2 + [16(2 - \mu)a_{14} + 120(1 - \mu)a_{06}]\zeta^3 + \rho^2\{[16(2 - \mu)a_{21} + 6(1 - \mu)a_{13}] + [32(2 - \mu)a_{22} + 24(1 - \mu)a_{14}]\zeta\};$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = \rho\{[32(1 - \mu)a_{20} - 4\mu a_{12}] + [32(1 - \mu)a_{21} - 12\mu a_{13}]\zeta + [32(1 - \mu)a_{22} - 24\mu a_{14}]\zeta^2\} + \rho^3[144(1 - \mu)a_{30} - 8\mu a_{22}].$$

Бигармоничность безразмерной функции Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  даёт четыре уравнения:

(2.22a)

$$\begin{aligned} 24a_{04} + 16a_{12} + 64a_{20} &= 0; \\ 120a_{05} + 48a_{13} + 64a_{21} &= 0; \\ 360a_{06} + 96a_{14} + 64a_{22} &= 0; \\ 24a_{14} + 64a_{22} + 576a_{30} &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия на торцах (см. рис. 2.2, а)

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta}(\rho, 0) &= 0; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) &= 0; \\ \sigma_{\zeta}(\rho, 1) &= -1; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) &= 0 \end{aligned}$$

дают ещё 7 уравнений:

(2.22б)

$$\begin{aligned} 4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03} &= 0; \\ 16(2 - \mu)a_{21} + 6(1 - \mu)a_{13} &= 0; \\ 32(1 - \mu)a_{20} - 4\mu a_{12} &= 0; \\ 144(1 - \mu)a_{30} - 8\mu a_{22} &= 0; \\ 8(2 - \mu)a_{12} + 24(1 - \mu)a_{04} + 12(2 - \mu)a_{13} + 60(1 - \mu)a_{05} + 16(2 - \mu)a_{14} + 120(1 - \mu)a_{06} &= -1; \\ 32(2 - \mu)a_{22} + 24(1 - \mu)a_{14} &= 0; \\ 32(1 - \mu)a_{21} - 12\mu a_{13} + 32(1 - \mu)a_{22} - 24\mu a_{14} &= 0. \end{aligned}$$

Итак, 16 коэффициентов представления бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для сплошного трёхмерного цилиндрического тела и для круглой центральной части сплошного трёхмерного цилиндрического тела должны удовлетворять 11 уравнениям системы (2.22а) и (2.22б).

Одно из этих уравнений (например предпоследнее) линейно зависит от остальных, и ранг системы равен 10.

В результате эта бигармоническая безразмерная функция напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  принимает вид:

(2.23)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 - 2/3 (2 - \mu)/(1 - \mu) a_{11}\zeta^3 - 8/3 (2 - \mu)/\mu a_{20}\zeta^4 + (3 - \mu)/20 \zeta^5 - (3 - \mu)/60 \zeta^6 + \rho^2[a_{10} + a_{11}\zeta + 8(1 - \mu)/\mu a_{20}\zeta^2 - (2 - \mu)/4 \zeta^3 + (2 - \mu)/8 \zeta^4] + \rho^4[a_{20} + 3(1 - \mu)/32 \zeta - 3(1 - \mu)/32 \zeta^2] - \mu/192 \rho^6.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 53/244

Благодаря формуле (2.23) получаем выражения для безразмерных радиального  $u_r(\rho, \zeta)$  и осевого  $u_z(\rho, \zeta)$  перемещений ( $C_1$  – произвольная постоянная)

(2.24)

$$\begin{aligned} u_r(\rho, \zeta) &= \rho[-2a_{11} - 32(1-\mu)/\mu a_{20}\zeta + 3(2-\mu)/2 \zeta^2 - (2-\mu)\zeta^3] + \rho^3[-3(1-\mu)/8 + 3(1-\mu)/4 \zeta]; \\ u_z(\rho, \zeta) &= C_1 + 4\mu/(1-\mu) a_{11}\zeta + 32a_{20}\zeta^2 - (1+\mu)\zeta^3 + (1+\mu)/2 \zeta^4 + \rho^2[16(1-\mu)/\mu a_{20} + 3\mu/2 \zeta - 3\mu/2 \zeta^2] - 3(1-\mu)/16 \rho^4 \end{aligned}$$

и для безразмерных радиального  $\sigma_r(\rho, \zeta)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$ , осевого  $\sigma_z(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{r\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений

(2.25)

$$\begin{aligned} \sigma_r(\rho, \zeta) &= -2(1+\mu)/(1-\mu) a_{11} - 32(1+\mu)/\mu a_{20}\zeta + 3(2+\mu)/2 \zeta^2 - (2+\mu)\zeta^3 + \rho^2[-3(3+\mu)/8 + 3(3+\mu)/4 \zeta]; \\ \sigma_\varphi(\rho, \zeta) &= -2(1+\mu)/(1-\mu) a_{11} - 32(1+\mu)/\mu a_{20}\zeta + 3(2+\mu)/2 \zeta^2 - (2+\mu)\zeta^3 + \rho^2[-3(1+3\mu)/8 + 3(1+3\mu)/4 \zeta]; \\ \sigma_z(\rho, \zeta) &= -3\zeta^2 + 2\zeta^3; \\ \tau_{r\zeta}(\rho, \zeta) &= \rho(3\zeta - 3\zeta^2). \end{aligned}$$

Общее число коэффициентов в представлении (2.23) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для круглой центральной части равно 16.

Ранг системы 11 уравнений (2.22а) и (2.22б) равен 10.

Поэтому в представлении (2.23) есть 6 произвольных коэффициентов:  $a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{10}, a_{11}, a_{20}$ .

При этом два из них  $a_{00}, a_{01}$  исчезают при применении дифференциальных операторов (2.3), не влияют на перемещения (2.24) и напряжения (2.25) и являются несущественными.

Ещё два  $a_{02}, a_{10}$  из этих коэффициентов становятся излишними при введении постоянной  $C_1$ , характеризующей осевое перемещение сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и круглой центральной части сплошного трёхмерного цилиндрического тела как абсолютно твёрдого тела.

В отличие от предыдущих, коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{20}$  являются существенными и влияют на безразмерные радиальное  $u_r(\rho, \zeta)$  и осевое  $u_z(\rho, \zeta)$  перемещения и на безразмерные радиальное  $\sigma_r(\rho, \zeta)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$  напряжения.

А безразмерные осевое  $\sigma_z(\rho, \zeta)$  и сдвиговое  $\tau_{r\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжения определяются однозначно и независимо от этих постоянных  $a_{11}$  и  $a_{20}$ .

Коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{20}$  выбираются так, чтобы наилучшим образом выполнялись граничные условия на боковой поверхности.

При этом условие бигармоничности и граничные условия на основаниях выполнены точно при любых значениях постоянных  $a_{11}, a_{20}$  и  $C_1$ .

Сами эти постоянные – пока произвольные – остаются в запасе для наилучшего приближённого удовлетворения приближённого решения граничным условиям на боковой поверхности, а в задаче для круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела – в целях сопряжения по безразмерному радиусу  $\rho = b$  с решением для кольцевой периферической части.

## 2.4. Определение общей полустепенной бигармонической безразмерной функции напряжений Лява для кольцевых трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов

В случае кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и кольцевой периферической части сплошного трёхмерного цилиндрического тела исходим из более общего представления бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  (2.21):

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} a_{ij} \rho^{2i} \zeta^j + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^{4-2i} b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho \zeta^j,$$

или

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} (a_{ij} \rho^{2i} + b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho) \zeta^j \quad (b_{ij} = 0 \text{ при } 2i + j > 4).$$

По соображениям удобства и наглядности приведём представление (2.21) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  в развёрнутом виде:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 + a_{03}\zeta^3 + a_{04}\zeta^4 + a_{05}\zeta^5 + a_{06}\zeta^6 + \ln\rho(b_{00} + b_{01}\zeta + b_{02}\zeta^2 + b_{03}\zeta^3 + b_{04}\zeta^4) + \rho^2(a_{10} + a_{11}\zeta + a_{12}\zeta^2 + a_{13}\zeta^3 + a_{14}\zeta^4) + \rho^2 \ln\rho(b_{10} + b_{11}\zeta + b_{12}\zeta^2) + \rho^4(a_{20} + a_{21}\zeta + a_{22}\zeta^2) + \rho^4 \ln\rho b_{20} + \rho^6 a_{30}.$$

Находим

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = (64a_{20} + 16a_{12} + 24a_{04} + 96b_{20} + 16b_{12}) + (64a_{21} + 48a_{13} + 120a_{05})\zeta + (64a_{22} + 96a_{14} + 360a_{06})\zeta^2 + \ln\rho(64b_{20} + 16b_{12} + 24b_{04}) + \rho^2(576a_{30} + 64a_{22} + 24a_{14});$$

$$\sigma_\zeta(\rho, \zeta) = [4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03} + 4(2 - \mu)b_{11}] + [8(2 - \mu)a_{12} + 24(1 - \mu)a_{04} + 8(2 - \mu)b_{12}]\zeta + [12(2 - \mu)a_{13} + 60(1 - \mu)a_{05}]\zeta^2 + [16(2 - \mu)a_{14} + 120(1 - \mu)a_{06}]\zeta^3 + \ln\rho\{[4(2 - \mu)b_{11} + 6(1 - \mu)b_{03}] + [8(2 - \mu)b_{12} + 24(1 - \mu)b_{04}]\zeta\} + \rho^2\{[16(2 - \mu)a_{21} + 6(1 - \mu)a_{13}] + [32(2 - \mu)a_{22} + 24(1 - \mu)a_{14}]\zeta\};$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = \rho^{-1}\{[4(1 - \mu)b_{10} - 2\mu b_{02}] + [4(1 - \mu)b_{11} - 6\mu b_{03}]\zeta + [4(1 - \mu)b_{12} - 12\mu b_{04}]\zeta^2\} + \rho\{[32(1 - \mu)a_{20} - 4\mu a_{12} + 32(1 - \mu)b_{20} - 2\mu b_{12}] + [32(1 - \mu)a_{21} - 12\mu a_{13}]\zeta + [32(1 - \mu)a_{22} - 24\mu a_{14}]\zeta^2\} + \rho \ln\rho[32(1 - \mu)b_{20} - 4\mu b_{12}] + \rho^3[144(1 - \mu)a_{30} - 8\mu a_{22}].$$

С учётом бигармоничности

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = 0$$

безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  и граничных условий на торцах (постоянная  $K_2$  относится к общему случаю (см. рис. 2.2, б), а применительно к нашему светопрозрачному элементу иллюминатора (см. рис. 2.1)  $K_2 = p_2/p = a^2/(a^2 - a_1^2)$ )

$$(2.26)$$

$$\sigma_\zeta(\rho, 0) = -K_2;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) = 0;$$

$$\sigma_\zeta(\rho, 1) = -1;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) = 0$$

получаем систему из 17 уравнений:

$$64a_{20} + 16a_{12} + 24a_{04} + 96b_{20} + 16b_{12} = 0;$$

$$64a_{21} + 48a_{13} + 120a_{05} = 0;$$

$$64a_{22} + 96a_{14} + 360a_{06} = 0;$$

$$64b_{20} + 16b_{12} + 24b_{04} = 0;$$

$$576a_{30} + 64a_{22} + 24a_{14} = 0;$$

$$4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03} + 4(2 - \mu)b_{11} = -K_2;$$

$$4(2 - \mu)b_{11} + 6(1 - \mu)b_{03} = 0;$$

$$16(2 - \mu)a_{21} + 6(1 - \mu)a_{13} = 0;$$

$$4(1 - \mu)b_{10} - 2\mu b_{02} = 0;$$

$$32(1 - \mu)a_{20} - 4\mu a_{12} + 32(1 - \mu)b_{20} - 2\mu b_{12} = 0;$$

$$32(1 - \mu)b_{20} - 4\mu b_{12} = 0;$$

$$144(1 - \mu)a_{30} - 8\mu a_{22} = 0;$$

$$4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03} + 4(2 - \mu)b_{11} + 8(2 - \mu)a_{12} + 24(1 - \mu)a_{04} + 8(2 - \mu)b_{12} + 12(2 - \mu)a_{13} + 60(1 - \mu)a_{05} + 16(2 - \mu)a_{14} + 120(1 - \mu)a_{06} = -1;$$

$$8(2 - \mu)b_{12} + 24(1 - \mu)b_{04} = 0;$$

$$32(2 - \mu)a_{22} + 24(1 - \mu)a_{14} = 0;$$

$$4(1 - \mu)b_{11} - 6\mu b_{03} + 4(1 - \mu)b_{12} - 12\mu b_{04} = 0;$$

$$32(1 - \mu)a_{21} - 12\mu a_{13} + 32(1 - \mu)a_{22} - 24\mu a_{14} = 0.$$

Решение этой системы приводит к следующему виду бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ :

$$(2.27)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 + [-K_2/(6(1 - \mu)) - 2/3(2 - \mu)/(1 - \mu)a_{11} + 16/3(2 - \mu)/\mu b_{20}]\zeta^3 - [8/3(2 - \mu)/\mu a_{20} + 4(2 - \mu)/\mu b_{20}]\zeta^4 - (K_2 - 1)(3 - \mu)/20 \zeta^5 + (K_2 - 1)(3 - \mu)/60 \zeta^6 + \ln\rho[b_{00} + b_{01}\zeta + 2(1 - \mu)/\mu b_{10}\zeta^2 + 16/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^3 - 8/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^4] + \rho^2\{a_{10} + a_{11}\zeta + [8(1 - \mu)/\mu a_{20} + 4(1 - \mu)/\mu b_{20}]\zeta^2 + (K_2 - 1)(2 - \mu)/4 \zeta^3 - (K_2 - 1)(2 - \mu)/8 \zeta^4\} + \rho^2 \ln\rho[b_{10} - 8(1 - \mu)/\mu b_{20}\zeta + 8(1 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^2] + \rho^4[a_{20} - 3(K_2 - 1)(1 - \mu)/32 \zeta + 3(K_2 - 1)(1 - \mu)/32 \zeta^2] + \rho^4 \ln\rho b_{20} + (K_2 - 1)\mu/192 \rho^6.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 55/244

С учётом (2.3) и (2.27) запишем выражения для безразмерных радиального  $u_r(\rho, \zeta)$  и осевого  $u_z(\rho, \zeta)$  перемещений ( $C_2$  – произвольная постоянная, поглотившая сумму  $8(1 - \mu)a_{10} + 2(1 - 2\mu)a_{02} + 8(1 - \mu)b_{10}$ )

(2.28)

$$u_r(\rho, \zeta) = \rho^{-1}[-b_{01} - 4(1 - \mu)/\mu b_{10}\zeta - 16(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^2 + 32/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^3] + \rho[-2a_{11} + 8(1 - \mu)/\mu b_{20} - 32(1 - \mu)/\mu(a_{20} + b_{20})\zeta - 3(K_2 - 1)(2 - \mu)/2\zeta^2 + (K_2 - 1)(2 - \mu)\zeta^3] + \rho \ln \rho [16(1 - \mu)/\mu b_{20} - 32(1 - \mu)/\mu b_{20}\zeta] + \rho^3 [3(K_2 - 1)(1 - \mu)/8 - 3(K_2 - 1)(1 - \mu)/4\zeta];$$

$$u_z(\rho, \zeta) = C_2 + [-K_2(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + 4\mu/(1 - \mu)a_{11} - 32b_{20}]\zeta + (32a_{20} + 48b_{20})\zeta^2 + (K_2 - 1)(1 + \mu)\zeta^3 - (K_2 - 1)(1 + \mu)/2\zeta^4 + \ln \rho [4(1 - \mu)/\mu b_{10} - 32b_{20}\zeta + 32b_{20}\zeta^2] + \rho^2 [16(1 - \mu)/\mu a_{20} + 8(1 - \mu)/\mu b_{20} - 3(K_2 - 1)\mu/2\zeta + 3(K_2 - 1)\mu/2\zeta^2] + 16(1 - \mu)/\mu b_{20}\rho^2 \ln \rho - 3(1 - \mu)/16\rho^4$$

и для безразмерных радиального  $\sigma_r(\rho, \zeta)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_\phi(\rho, \zeta)$ , осевого  $\sigma_z(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{r\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений

(2.29)

$$\sigma_r(\rho, \zeta) = \rho^{-2}[b_{01} + 4(1 - \mu)/\mu b_{10}\zeta + 16(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^2 - 32/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^3] - K_2\mu/(1 - \mu) - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)a_{11} + 8(3 + \mu)/\mu b_{20} - [32(1 + \mu)/\mu a_{20} + 32(2 + \mu)/\mu b_{20}]\zeta - 3(K_2 - 1)(2 + \mu)/2\zeta^2 + (K_2 - 1)(2 + \mu)\zeta^3 + \ln \rho [16(1 + \mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20}\zeta] + \rho^2 [3(K_2 - 1)(3 + \mu)/8 - 3(K_2 - 1)(3 + \mu)/4\zeta];$$

$$\sigma_\phi(\rho, \zeta) = \rho^{-2}[-b_{01} - 4(1 - \mu)/\mu b_{10}\zeta - 16(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^2 + 32/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^3] - K_2\mu/(1 - \mu) - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)a_{11} + 8(1 + 3\mu)/\mu b_{20} - [32(1 + \mu)/\mu a_{20} + 32(2 + \mu)/\mu b_{20}]\zeta - 3(K_2 - 1)(2 + \mu)/2\zeta^2 + (K_2 - 1)(2 + \mu)\zeta^3 + \ln \rho [16(1 + \mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20}\zeta] + \rho^2 [3(K_2 - 1)(1 + 3\mu)/8 - 3(K_2 - 1)(1 + 3\mu)/4\zeta];$$

$$\sigma_z(\rho, \zeta) = -K_2 + 3(K_2 - 1)\zeta^2 - 2(K_2 - 1)\zeta^3;$$

$$\tau_{r\zeta}(\rho, \zeta) = [32\mu^{-1}b_{20}\rho^{-1} + 3(K_2 - 1)\rho](-\zeta + \zeta^2).$$

В представлении (2.21) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  было 25 неопределённых коэффициентов.

После решения системы из 17 уравнений, два из которых оказались линейно зависимыми от остальных, остались 10 коэффициентов:  $a_{00}, a_{01}, b_{00}, a_{02}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, b_{01}, b_{10}, b_{20}$ .

Первые три  $a_{00}, a_{01}, b_{00}$  из них не сохраняются дифференциальными операторами (2.3), не влияют на перемещения (2.27) и на напряжения (2.28) и являются несущественными.

Последующие два коэффициента  $a_{02}, a_{10}$  поглощаются постоянным слагаемым  $C_2$ , вводимым для аннулирования осевого перемещения  $u_z(\rho, \zeta)$  на одной окружности.

В отличие от предыдущих, коэффициенты  $a_{11}, a_{20}, b_{01}, b_{10}, b_{20}$  являются существенными и влияют на безразмерные радиальное  $u_r(\rho, \zeta)$  и осевое  $u_z(\rho, \zeta)$  перемещения и на безразмерные радиальное  $\sigma_r(\rho, \zeta)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_\phi(\rho, \zeta)$  напряжения.

Безразмерное осевое напряжение  $\sigma_z(\rho, \zeta)$  определяется однозначно и независимо от этих постоянных  $a_{11}, a_{20}, b_{01}, b_{10}, b_{20}$ . А безразмерное сдвиговое напряжение  $\tau_{r\zeta}(\rho, \zeta)$  зависит от постоянной  $b_{20}$ . При этом условие бигармоничности и граничные условия на основаниях выполнены точно при любых значениях постоянных  $a_{11}, a_{20}, b_{01}, b_{10}, b_{20}$  и  $C_2$ .

Сами эти постоянные – пока произвольные – остаются в запасе для наилучшего приближённого удовлетворения аналитического решения граничным условиям на боковых поверхностях, то есть на поверхности сопряжения по безразмерному радиусу  $\rho = b$  круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (круглого центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов) и на внешней цилиндрической поверхности безразмерным радиусом  $\rho = c$  кольцевой периферической части сплошного трёхмерного цилиндрического тела (кольцевого трёхмерного цилиндрического элемента).

Итак, решение задач об изгибе равномерным давлением круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (круглого центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов) сводится к выполнению граничных условий на боковых поверхностях. Варианты их удовлетворения излагаются далее для всех четырёх расчётных схем таблицы 1.2.

Для удобства вначале рассматривается жёсткое защемление края сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента).

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 56/244

## **2.5. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, жёстко защемлённого по краю, теория и среднеквадратичный, обеспечивающий минимакс модуля и коллокационный методы минимизации невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения**

Теории осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание круглой пластины и круглой плиты, жёстко защемлённых по краю, математически строго проанализированы и обобщены теорией осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного существенно трёхмерного цилиндрического тела, жёстко защемлённого по краю.

Жёсткое защемление края именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, соответствует второй сверху расчётной схеме в левом столбце таблицы 1.2.

Именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело радиусом  $a$  и высотой (толщиной)  $h$  нагружено равномерным давлением  $p$  на верхнее основание  $z = h$  и удерживается в равновесии жёстким защемлением края (боковой поверхности)  $r = a$ .

Граничные условия для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) радиусом  $a$  и толщиной  $h$  с жёстко защемлённым краем показаны на рис. 1.6, в:

(2.30)

$$\begin{aligned}\sigma_z(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_z(r, h) &= -p \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, h) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ u_r(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h); \\ u_z(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h).\end{aligned}$$

Поскольку две постоянные  $a_{11}$  и  $a_{20}$  есть и в формулах (2.27) – (2.29) для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и могут принимать для него другие значения, чем для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), как для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, то в формулах (2.23) – (2.25) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) для различения обозначим:

(2.31)

$$\begin{aligned}x &= a_{11}, \\ y &= a_{20}.\end{aligned}$$

Точное решение для жёсткого защемления края сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) требует аннулировать перемещения  $u_r(r, z)$  и  $u_z(r, z)$  боковой поверхности  $r = a$  тождественно по  $z$ :

$$\begin{aligned}u_r(a, z) &= 0, \\ u_z(a, z) &= 0.\end{aligned}$$

Используем прежние безразмерные обозначения, в том числе безразмерный радиус сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

$$c = a/h,$$

кроме лишних здесь

$$b = a_1/h.$$

Тогда формулы (2.24) дают безразмерные радиальное  $u_\rho(\rho, \zeta)$  и осевое  $u_\zeta(\rho, \zeta)$  перемещения боковой поверхности  $\rho = c$ :



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 57/244

$$u_r(c, \zeta) = c[-2x - 32(1 - \mu)/\mu y\zeta + 3(2 - \mu)/2 \zeta^2 - (2 - \mu)\zeta^3] + c^3[-3(1 - \mu)/8 + 3(1 - \mu)/4 \zeta] = -3(1 - \mu)c^3/8 - 2cx + [3(1 - \mu)c^3/4 - 32(1 - \mu)/\mu cy]\zeta + 3(2 - \mu)/2 c\zeta^2 - (2 - \mu)c\zeta^3;$$

$$u_\zeta(c, \zeta) = C_1 + 4\mu/(1 - \mu) x\zeta + 32y\zeta^2 - (1 + \mu)\zeta^3 + (1 + \mu)/2 \zeta^4 + c^2[16(1 - \mu)/\mu y + 3\mu/2 \zeta - 3\mu/2 \zeta^2] - 3(1 - \mu)/16 c^4 = -3(1 - \mu)c^4/16 + 16(1 - \mu)/\mu c^2y + C_1 + [3\mu/2 c^2 + 4\mu/(1 - \mu) x]\zeta + [-3\mu c^2/2 + 32y]\zeta^2 - (1 + \mu)\zeta^3 + (1 + \mu)/2 \zeta^4.$$

Эти формулы показывают невозможность аннулировать тождественно по  $\zeta$  ни безразмерное радиальное  $u_r(c, \zeta)$ , ни безразмерное осевое  $u_\zeta(c, \zeta)$  перемещения боковой поверхности  $\rho = c$ , так как  $2 - \mu$ ,  $c$  и  $1 + \mu$  отличны от нуля. Поэтому решение может быть лишь приближённым. Выбор

$$C_1 = 3(1 - \mu)c^4/16 - 16(1 - \mu)/\mu c^2y$$

обеспечивает отсутствие безразмерного осевого перемещения края нижнего основания

$$u_\zeta(c, 0) = 0.$$

Как и выше, здесь и в дальнейшем используется понятие невязок сопряжения (Л. Б. Цвик [172]) как разностей выражений одноимённых величин, в частности перемещений и напряжений, для разных частей тела, имеющих общую границу, в точках этой границы, обобщается это понятие на случай границ целого тела с заданными граничными условиями посредством разностей граничных условий и соответствующих значений величин в точках этих границ и применяются различные рациональные методы минимизации невязок сопряжения.

Методы приближённого выполнения граничных условий математически строго проанализированы и обобщены теорией минимизации невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения, осуществляемой среднеквадратичным, обеспечивающим минимум модуля и коллокационным методами.

Две постоянные  $x$  и  $y$  могут быть использованы для минимизации безразмерных радиального  $u_r(c, \zeta)$  и осевого  $u_\zeta(c, \zeta)$  перемещений боковой поверхности  $\rho = c$ .

Роли невязок по этим двум безразмерным перемещениям различны.

Невязка по безразмерному радиальному перемещению  $u_r(c, \zeta)$  оказывает существенное влияние на напряжённо-деформированное состояние сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) в целом.

Влияние невязки по безразмерному осевому перемещению  $u_\zeta(c, \zeta)$  резко убывает при удалении от края  $\rho = c$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), несущественно для безразмерных радиального перемещения  $u_r(\rho, \zeta)$ , радиального  $\sigma_r(\rho, \zeta)$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_\theta(\rho, \zeta)$  напряжений и мало значимо даже для однозначно определяемых выполненными точно граничными условиями на торцах

$$\sigma_\zeta(\rho, 0), \tau_{r\zeta}(\rho, 0), \sigma_\zeta(\rho, 1), \tau_{r\zeta}(\rho, 1)$$

осевого  $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{r\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений, а интеграл  $\int_0^1 \tau_{r\zeta}(\rho, \zeta) d\zeta$  однозначно определяется выполненными точно уравнениями равновесия.

Кроме того, и в работах [3, 104] безразмерное осевое перемещение  $u_\zeta(c, \zeta)$  боковой поверхности  $\rho = c$  аннулируется также лишь при одном значении  $\zeta$ , что и сделано здесь посредством выбора значения постоянной  $C_1$ .

Поэтому выбор обеих оставшихся постоянных  $x$  и  $y$  используем для минимизации [67] безразмерного радиального перемещения  $u_r(c, \zeta)$  боковой поверхности  $\rho = c$ .

В дальнейшем потребуются минимизировать на отрезке  $[0, 1]$  аналогичные многочлены третьей степени относительно  $\zeta$ , в которых свободный член  $A$  и коэффициент  $B$  при  $\zeta$  изменяются, а коэффициенты при  $\zeta^2$  и  $\zeta^3$  постоянны и относятся друг к другу как  $3:(-2)$ .

Метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения в данном случае на отрезке  $[0, 1]$  минимизирует многочлен

$$(2.32) \\ Q(\zeta) = A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 58/244

минимизацией функции  $M(A, B)$  как делённого на длину отрезка, в данном случае единичную, интеграла от квадрата функции, в данном случае от квадрата многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32) на этом отрезке  $[0, 1]$ :

$$M(A, B) = (1 - 0)^{-1} \int_0^1 Q^2(\zeta) d\zeta = \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta$$

$$(-\infty < A < +\infty, -\infty < B < +\infty).$$

При стремлении модулей аргументов  $A$  или  $B$  к плюс бесконечности функция  $M(A, B)$  стремится к плюс бесконечности.

Точная нижняя грань ограниченной снизу нулём неотрицательной функции  $M(A, B)$  существует и ввиду непрерывности этой функции непременно принимается ею при некоторых парах конечных значений аргументов  $A$  и  $B$ , а поэтому является именно минимумом этой функции.

Необходимое условие любого экстремума дифференцируемой функции  $M(A, B)$  во внутренних точках промежутков для каждого из обоих аргументов  $A$  и  $B$  есть аннулирование всех её частных производных по её аргументам в отдельности, то есть в данном случае пары аргументов  $A$  и  $B$  система двух уравнений:

$$\partial M(A, B) / \partial A = 0;$$

$$\partial M(A, B) / \partial B = 0.$$

$$(\partial / \partial A) \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta = \int_0^1 (\partial / \partial A)(A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta = 2 \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3) d\zeta = 2(A + B/2 + 1 - 1/2) = 2A + B + 1;$$

$$(\partial / \partial B) \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta = \int_0^1 (\partial / \partial B)(A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta = 2 \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3) \zeta d\zeta = 2 \int_0^1 (A\zeta + B\zeta^2 + 3\zeta^3 - 2\zeta^4) \zeta d\zeta = 2(A/2 + B/3 + 3/4 - 2/5) = A + 2B/3 + 7/10.$$

$$2A + B + 1 = 0;$$

$$A + 2B/3 + 7/10 = 0.$$

Эта система двух уравнений с ненулевым главным определителем имеет единственное решение

$$(2.33)$$

$$A = 0.1;$$

$$B = -1.2,$$

которое поэтому и обеспечивает требуемую среднеквадратичную минимизацию многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32) на отрезке  $[0, 1]$ .

Метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей обеспечивает в данном случае минимакс (минимум по совокупности значений постоянных  $A$  и  $B$  максимума по  $\zeta$ ) абсолютной величины многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32) на отрезке  $[0, 1]$ .

Производная

$$(\partial / \partial \zeta) Q(\zeta) = (\partial / \partial \zeta)(A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3) = B + 6\zeta - 6\zeta^2 = -6(\zeta^2 - \zeta - B/6)$$

многочлена  $Q(\zeta)$  обращается в нуль при каждом из двух значений аргумента  $\zeta$

$$\zeta_1 = (1 - (1 + 2B/3)^{1/2})/2,$$

$$\zeta_2 = (1 + (1 + 2B/3)^{1/2})/2.$$

При  $B \leq -3/2$  разность

$$Q(0) - Q(1) = -1 - B \geq 1/2$$

и поэтому не меньшее половины последней разности значение

$$\max \{ |Q(\zeta)| : 0 \leq \zeta \leq 1 \} \geq 1/4.$$

При  $-3/2 < B < 0$  имеет место именно строгая упорядоченность

$$0 < \zeta_1 < \zeta_2 < 1$$

и в точке  $\zeta_1$  достигается минимум, в точке  $\zeta_2$  – максимум многочлена  $Q(\zeta)$ .

Полагая

$$t = (1 + 2B/3)^{1/2},$$

так что

$$0 < t < 1,$$

$$\zeta_1 = (1 - t)/2,$$

$$\zeta_2 = (1 + t)/2,$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 59/244

рассматриваем также минимум

$$Q(\zeta_1) = Q[(1 - t)/2] = A - 1/4 + 3t^2/4 - t^3/2$$

и максимум

$$Q(\zeta_2) = Q[(1 + t)/2] = A - 1/4 + 3t^2/4 + t^3/2$$

многочлена  $Q(\zeta)$  именно во внутренних точках отрезка  $[0, 1]$ .

При  $t = 1/2$  имеют место на концах и в этих внутренних точках отрезка  $[0, 1]$  значения многочлена  $Q(\zeta)$

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q(3/4) = A, \\ Q(1) &= Q(1/4) = A - 1/8, \end{aligned}$$

так что именно и только при

$$A = 1/16$$

как половине разностей

$$Q(0) - Q(1) = Q(3/4) - Q(1/4) = A - (A - 1/8) = 1/8$$

достигается значение

$$\max\{|Q(\zeta)|: 0 \leq \zeta \leq 1\} = 1/16.$$

Если  $0 < t < 1/2$ , то разность  $Q(0) - Q(1) = 1/2 - 3t^2/2 > 1/8$

и поэтому не меньше половины последней разности значение

$$\max\{|Q(\zeta)|: 0 \leq \zeta \leq 1\} > 1/16.$$

При  $1/2 < t < 1$  разность

$$Q(\zeta_2) - Q(\zeta_1) = Q[(1 + t)/2] - Q[(1 - t)/2] = t^3 > 1/8$$

и поэтому не меньше половины последней разности значение

$$\max\{|Q(\zeta)|: 0 \leq \zeta \leq 1\} > 1/16.$$

При  $B \geq 0$  разность  $Q(1) - Q(0) = 1 + B \geq 1$

и поэтому не меньше половины последней разности значение  $\max\{|Q(\zeta)|: 0 \leq \zeta \leq 1\} \geq 1/2$ .

В итоге искомым минимакс (минимум по совокупности значений постоянных  $A$  и  $B$  максимума по  $\zeta$  абсолютной величины многочлена  $Q(\zeta)$  на отрезке  $[0, 1]$ ) составляет

$$\min_{A,B} \max_{0 \leq \zeta \leq 1} |Q(\zeta)| = 1/16$$

при совокупности условий

$$(2.34)$$

$$A = 1/16,$$

$$B = -9/8.$$

Возможен и третий априорно разумный метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием пары из четырёх значений – среднего, на торцах и посередине отрезка  $[0, 1]$ :  $\int_0^1 Q(\zeta) d\zeta$ ,  $Q(0)$ ,  $Q(1/2)$ ,  $Q(1)$ ,

что в данном случае минимизации многочлена  $Q(\zeta)$  даёт одинаковые итоги при любом выборе этой пары и аннулирует сразу все четыре указанных значения.

Для примера докажем это для аннулирования первой пары, что даёт совместно два условия:

$$\int_0^1 Q(\zeta) d\zeta = 0;$$

$$Q(0) = 0.$$

Они по формуле (2.32) дают соответственно:

$$A + B/2 + 3/3 - 2/4 = 0;$$

$$(2.35)$$

$$A = 0,$$

откуда

$$B = -1.$$

Тогда, что и требовалось доказать, аннулируется и последняя пара из четырёх значений

$$Q(1/2) = A + B/2 + 3/4 - 2/8 = 0;$$

$$Q(1) = A + B + 3 - 2 = 0.$$

Иные априорно разумные известные подходы к минимизации многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32) на отрезке  $[0, 1]$  не вносят нового по сравнению с рассмотренными выше тремя методами.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 60/244

В частности, к первому методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения сводится аннулирование интегрального среднего  $\int_0^1 Q(\zeta) d\zeta$  и момента  $\int_0^1 Q(\zeta)\zeta d\zeta$  [165].

Результаты минимизации невязок сопряжения по всем трём методам представим в единой записи с помощью числа  $m$ :

$$(2.36)$$

$m = 1/5$  по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения;

$m = 1/8$  по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей;

$m = 0$  по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Тем самым сразу для всех трёх методов минимизации невязок сопряжения достигается единообразная запись обеспечивающих минимизацию многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32) на отрезке  $[0, 1]$  значений постоянных  $A$  и  $B$ :

$$(2.37)$$

$$A = m/2;$$

$$B = -(1 + m).$$

Итак, минимизация  $u_p(c, \zeta)$  приводит к системе двух линейных уравнений относительно  $x, y$

$$-3(1 - \mu)c^3/8 - 2cx = m(2 - \mu)c/4;$$

$$3(1 - \mu)c^3/4 - 32(1 - \mu)/\mu cy = -(1 + m)(2 - \mu)c/2,$$

откуда

$$x = -m(2 - \mu)/8 - 3(1 - \mu)c^2/16;$$

$$y = (1 + m)\mu(2 - \mu)/[64(1 - \mu)] + 3\mu c^2/128.$$

Теперь по формулам (2.24) и (2.25) находятся выражения для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , окружного (тангенциального)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений, которые представляются в размерных координатах:

$$(2.38)$$

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{m(1 + \mu)(2 - \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - [(m - 1)(1 + \mu)(2 - \mu)/2 + (3/4)(1 - \mu^2)a^2/h^2]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [-3(1 - \mu^2)/8 + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = -(1/4)(m + 1)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)a^4/h^4 - [m\mu(1 + \mu)(1 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)\mu(1 + \mu)a^2/h^2]z/h + [(1/2)(m + 1)\mu(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) + (3/4)\mu(1 + \mu)a^2/h^2]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 + [(m + 1)(1 + \mu)(2 - \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu^2)a^2/h^2 + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - \mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = (1/4)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) + (3/8)(1 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(1 + \mu)(1 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)(1 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = (1/4)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) + (3/8)(1 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(1 + \mu)(1 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)(1 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = -3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;$$

$$\tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$$

В таблице 2.1 наглядно сопоставлены известные и предложенные методы упругого расчёта при изгибе равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, жёстко закреплённого по боковой поверхности.

Рассмотрены безразмерная стрела прогиба и безразмерное максимальное напряжение.

По общим формулам определены и численные значения при

$$a = 55 \text{ мм}; h = 60 \text{ мм}; \mu = 0.2$$

(последнее соответствует оптическому стеклу).

Относительные поправки к теории тонких пластин показаны на рисунке 2.3.

Нумерация методов минимизации невязок сопряжения на рисунке 2.3 справедлива и для последующих аналогичных рисунков.

Все уточняющие методы минимизации невязок сопряжения дают формулы одинаковой степени сложности, ненамного большей, чем сложность формул теории тонких пластин. Во всех случаях ей соответствует первое слагаемое формул по методам минимизации невязок сопряжения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 61/244

Таблица 2.1. Безразмерные стрела прогиба и наибольшее напряжение при изгибе равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, жёстко закреплённого по боковой поверхности.

| Метод расчёта и номер формулы                        | Безразмерная характеристика изгиба |  |
|--|------------------------------------|--|
|  | Стрела прогиба                     | Наибольшее напряжение  |
|  | $-u_z(0, 0)E/(ph)$                 | $\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_t(0, 0)/p;$<br>$\sigma_r(a, h)/p$ |
| Теория тонких пластин, таблица 1.2                   | 0.127                              | 0.630  |
| Метод среднеквадратичной минимизации невязок, (2.38) | $0.127 + 0.544 = 0.671$            | $0.378 + 0.135 = 0.513$<br>$0.630 - 0.135 = 0.495$           |
| Метод минимаксов модулей невязок сопряжения, (2.38)  | $0.127 + 0.510 = 0.637$            | $0.378 + 0.084 = 0.462$<br>$0.630 - 0.250 - 0.084 = 0.296$   |
| Метод коллокационной минимизации невязок, (2.38)     | $0.127 + 0.454 = 0.581$            | $0.378 + 0 = 0.378$<br>$0.630 - 0.250 = 0.380$               |

Все уточняющие методы минимизации невязок сопряжения обобщают теорию тонких пластин. Она является предельным случаем этих методов при  $h \ll a$ .

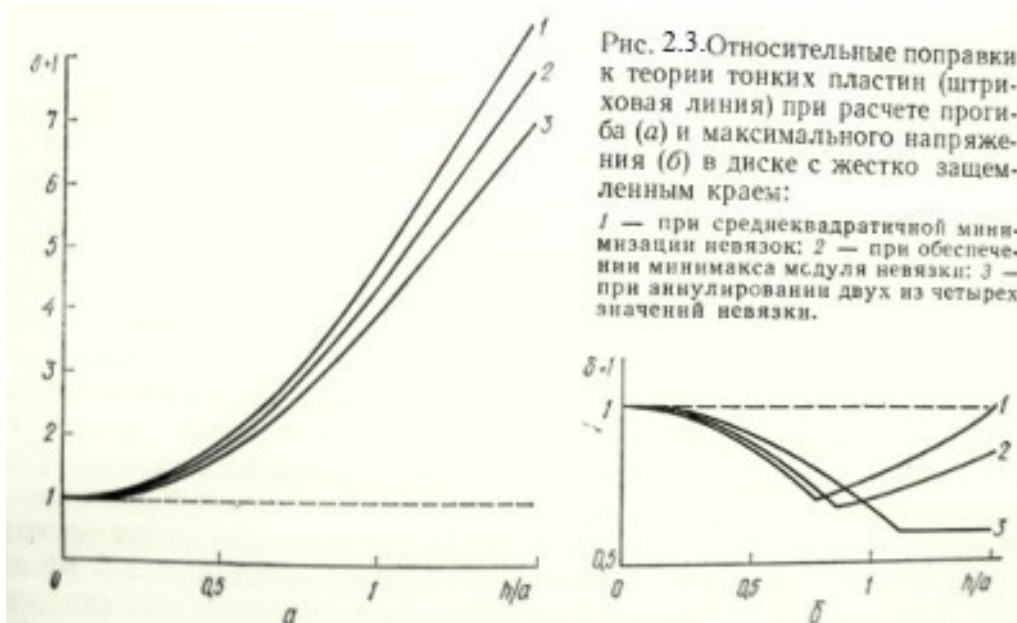


Рисунок 2.3. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия с единичной ординатой) при расчёте стрелы прогиба (а) и максимального напряжения (б) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, с жёстко закреплённым краем:

- 1 — по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения;
- 2 — по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей;
- 3 — по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений — среднего, на торцах и посередине.

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы, отличающиеся лишь коэффициентами в одном из уточняющих слагаемых. Поэтому отношения разностей значений, получаемых по этим формулам, не зависят от  $a$ ,  $h$  и  $\mu$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 62/244

Среди предложенных методов наибольшее значение стрелы прогиба даёт метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, наименьшее – метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Отношение наибольшего значения стрелы прогиба к её наименьшему значению лежит в довольно узком интервале между единицей при  $h \ll a$ , то есть для очень тонких пластин, и 1.2 при  $a \ll h$ , то есть для круглых стержней.

Метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт промежуточное значение стрелы прогиба, которое делит промежуток между её крайними значениями в отношении 3:5, если считать от большего значения.

Теория тонких пластин многократно, примерно в 5 раз, занижает стрелу прогиба при характерной для светопрозрачного элемента для высоких давлений относительной толщине.

Согласно теории тонких пластин максимально всегда напряжение  $\sigma_t(a, h)$ . Предлагаемые методы минимизации невязок сопряжения показывают, что это верно лишь при

$$a^2/h^2 > (8/3)\mu/(1 - \mu)^2 + (4/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu)^2.$$

Если в этом соотношении имеет место равенство, то максимальны

$$\sigma_t(a, h) = \sigma_t(0, 0) = \sigma_t(0, 0).$$

Если смысл последнего неравенства меняется на противоположный, то максимальны уже

$$\sigma_t(0, 0) = \sigma_t(0, 0).$$

Поскольку в неравенство для  $a^2/h^2$  входит характеристика метода минимизации невязок сопряжения, то критическое (соответствующее знаку равенства) значение  $a/h$  зависит от метода минимизации невязок сопряжения и при  $\mu = 0.2$  составляет:

1.316 по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения;

1.181 по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей;

0.912 по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Теория тонких пластин завышает максимальные напряжения при

$$a^2/h^2 > (2/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu)^2,$$

даёт верный результат, если имеет место равенство, и занижает максимальные напряжения, если смысл этого неравенства меняется на противоположный.

При первых двух методах минимизации невязок сопряжения могут быть все три возможности, а при третьем методе минимизации невязок сопряжения – лишь первая.

Однако действительное распределение напряжений при точном выполнении условия жёсткого защемления однозначно, а три предложенных метода минимизации невязок сопряжения приводят к различным приближениям.

Поэтому, по меньшей мере для реальных относительных толщин, можно считать, что теория тонких пластин завышает максимальные напряжения.

Это безусловно имеет место при  $h/a < 1.491$  (правая часть соответствует методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения при  $\mu = 0.2$ ).

Для оценки завышения укажем, что отношение максимальных напряжений по предложенным методам к таковым по теории тонких пластин составляет

$$\max \left\{ (1 + \mu)/2 + (1/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) h^2/a^2; 1 - (4/3)\mu/(1 + \mu) h^2/a^2 - (1/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) h^2/a^2 \right\} \geq (1 + \mu)/2 + (1/4)m(1 - \mu^2)(2 - \mu)/[2\mu + m(1 + \mu)(2 - \mu)].$$

Знак равенства имеет место при равенстве между собой выражений в последних фигурных скобках, то есть при  $a^2/h^2 = (8/3)\mu/(1 - \mu)^2 + (4/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu)^2$ .

Указанное отношение максимальных напряжений оказывается не менее чем

0.704 по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения,

0.682 по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и

0.6 по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине ( $\mu = 0.2$ ).

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 63/244

Верхней границей указанного отношения напряжений практически можно считать 1, так что напряжения в первом приближении определяются уже теорией тонких пластин, тем более что погрешность идёт в увеличение запаса прочности.

Поскольку граничные условия на торцах именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, выполнены точно, а влияние неточности в определении осевого перемещения  $u_z(a, z)$  боковой поверхности  $r = a$  имеет лишь местное значение, то погрешность решения характеризуется отклонением от нуля радиального перемещения  $u_r(a, z)$  боковой поверхности  $r = a$  (кривые I рисунка 2.4).

Полезно провести сопоставление радиального перемещения  $u_r(a, z)$  боковой поверхности  $r = a$  со стрелой прогиба  $u_z(a, z) - u_z(0, z)$  (кривые II рисунка 2.4), изменяющейся по толщине именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), и с относительным радиальным перемещением точек оси (кривые III рисунка 2.4)

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (a/r)u_r(r, z).$$

Последнее произведение имеет действительный физический смысл: оно пропорционально тангенциальной (окружной) деформации. Кроме того, при  $r = a$  оно обращается в радиальное перемещение  $u_r(a, z)$  боковой поверхности  $r = a$ .

Поэтому сопоставление с величиной этого предела также служит некоторой характеристикой влияния погрешности на краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) на его центральную часть.

На рисунке 2.4 в одинаковом масштабе показаны эпюры указанных величин (кривые I, II, III) в безразмерном представлении после умножения на  $E/(ph)$ .

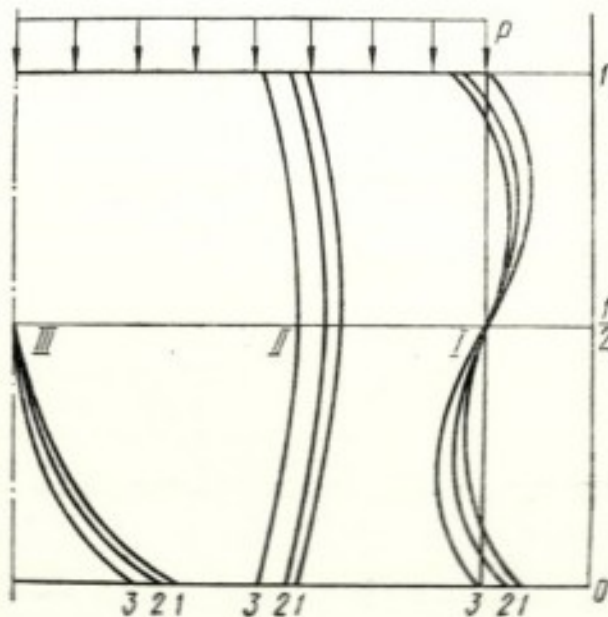


Рис. 2.4. Эпюры невязок и эпюры перемещений диска с жестко зашпемленным краем.

Рисунок 2.4. Эпюры невязок и эпюры перемещений именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) с жёстко зашпемленным краем.

Эпюра так умноженного радиального перемещения  $u_r(a, z)E/(ph)$  боковой поверхности  $r = a$  построена на краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), остальные две эпюры – на его оси.

Эпюра предела

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (a/r)u_r(r, z)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 64/244

показана лишь на отрезке  $[0, h/2]$ , поскольку она центрально симметрична относительно точки  $r = 0, z = h/2$ .

Исходные числовые данные:  $a = 55$  мм;  $h = 60$  мм;  $\mu = 0.2$  (оптическое стекло).

Кривые нумеруются в порядке следования методов минимизации невязок сопряжения.

Характеристические значения невязок соответствуют аннулированию и локальным экстремумам многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32) при трёх методах минимизации невязок сопряжения.

Эпюры невязок сопряжения на краю сопоставлены с эпюрами перемещений на оси.

Наиболее целесообразен метод минимизации невязок сопряжения обеспечением минимаксов их модулей, затем метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Уступает первым двум методам метод коллокационной минимизации невязок сопряжения.

Отмечается иной характер эпюры стрелы прогиба: не центральная, а зеркальная относительно срединной плоскости симметрия.

Кривые 1, 2, 3 эпюры стрелы прогиба идут со сдвигом вдоль радиуса, а не веерообразно.

## **2.6. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание свободно опёртого по краю сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента**

Теории осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание круглой пластины и круглой плиты, свободно опёртых по краю, математически строго проанализированы и обобщены теорией осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного существенно трёхмерного цилиндрического тела, свободно опёртого по краю.

Свободное опирание края именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) соответствует первой сверху расчётной схеме в левом столбце таблицы 1.2.

Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело радиусом  $a$  и высотой (толщиной)  $h$  нагружено равномерным давлением  $p$  на верхнее основание  $z = h$  и удерживается в равновесии свободным опиранием края  $r = a$  нижнего основания  $z = 0$ .

Граничные условия для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), свободно опёртого по краю, показаны на рис. 1.6, г:

(2.39)

$$\begin{aligned}\sigma_z(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_z(r, h) &= -p \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, h) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_r(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h); \\ u_z(a, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Точное решение для свободного опирания края именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) требует аннулировать осевое перемещение  $u_z(a, 0)$  края  $r = a$  ненагруженного плоского основания  $z = 0$  и радиальное напряжение  $\sigma_r(a, z)$  на боковой поверхности  $r = a$  тождественно по  $z$ .

Аннулирование сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(a, z)$  на боковой поверхности  $r = a$  не предусматривается, так как считается, что именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело удерживается в равновесии как раз этим сдвиговым напряжением на боковой поверхности  $r = a$ .

Поскольку две постоянные  $a_{11}$  и  $a_{20}$  есть и в формулах (2.23) – (2.25) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), и в формулах (2.27) – (2.29) для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) как для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, и могут принимать для них различные значения, то в формулах (2.23) – (2.25) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) для различения приняты прежние обозначения (2.31):



$$x = a_{11},$$

$$y = a_{20}.$$

Используются прежние безразмерные обозначения, в том числе постоянная  $C_1$  и безразмерный радиус

$$c = a/h$$

сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), кроме лишних здесь  $b = a_1/h$ .

Тогда формулы (2.24) дают безразмерные перемещения.

Применяются формулы (2.23) – (2.25) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и указанные два последних граничных условия (2.39) (см. рисунок 1.6, г).

Тогда на боковой поверхности  $\rho = c$  безразмерное радиальное напряжение

$$\sigma_r(c, \zeta) = -3(3 + \mu)c^2/8 - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)x + [3(3 + \mu)c^2/4 - 32(1 + \mu)/\mu y]\zeta + 3(2 + \mu)/2 \zeta^2 - (2 + \mu)\zeta^3$$

для точного решения должно быть тождественно равно нулю.

Но это невозможно, так как

$$2 + \mu \neq 0.$$

Поэтому решение может быть лишь приближённым.

Как и выше, минимизация безразмерного радиального напряжения  $\sigma_r(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$  осуществляется выбором тех же двух постоянных  $x$  и  $y$ .

Опять задача сводится к минимизации многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32) на отрезке  $[0, 1]$ .

Результаты минимизации по всем трём методам минимизации невязок сопряжения приводятся в единой записи с помощью формул (2.36) и (2.37).

Из соответствующей напряжению  $\sigma_r(c, \zeta)$  системы

$$\begin{aligned} -3(3 + \mu)c^2/8 - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)x &= m(2 + \mu)/4; \\ 3(3 + \mu)c^2/4 - 32(1 + \mu)/\mu y &= -(1 + m)(2 + \mu)/2 \end{aligned}$$

находятся

$$\begin{aligned} x &= -m(1 - \mu)(2 + \mu)/(8(1 + \mu)) - 3(1 - \mu)(3 + \mu)c^2/(16(1 + \mu)); \\ y &= (1 + m)\mu(2 + \mu)/(64(1 + \mu)) + 3\mu(3 + \mu)c^2/(128(1 + \mu)); \\ C_1 &= -(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)c^2/(4(1 + \mu)) - 3(1 - \mu)(5 + \mu)c^4/(16(1 + \mu)). \end{aligned}$$

Формулы для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений сплошного трёхмерного цилиндрического тела представляются в размерных координатах:

$$(2.40)$$

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{m(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(1 - \mu)(2 + \mu)/2 + (3/4)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [-3(1 - \mu^2)/8 + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = -(1/4)(m + 1)(1 - \mu)(2 + \mu)a^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)a^4/h^4 - [m\mu(2 + \mu)/2 + (3/4)\mu(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + [(m + 1)\mu(2 + \mu)/2 + (3/4)\mu(3 + \mu)a^2/h^2]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(m + 1)(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(2 + \mu)/2 + (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(2 + \mu)/2 + (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = -3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;$$

$$\tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$$

В таблице 2.2 сопоставлены известные и предложенные методы расчёта именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) при свободном опирании края.

Рассмотрены безразмерные стрела прогиба и максимальное напряжение.

Определены и численные значения при

$$a = 55 \text{ мм}; h = 60 \text{ мм}; \mu = 0.2 \text{ (оптическое стекло)}.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 66/244

Таблица 2.2. Безразмерные стрела прогиба и наибольшее напряжение при изгибе равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) при свободном опирании края.

| Метод расчёта и номер формулы                        | Безразмерная характеристика изгиба |                                       |
|--|------------------------------------|---------------------------------------|
|  | Стрела прогиба                     | Наибольшее напряжение                 |
|  | $-u_z(0, 0)E/(ph)$                 | $\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_t(0, 0)/p$ |
| Теория тонких пластин, таблица 1.2                   | 0.551                              | 1.008                                 |
| Метод среднеквадратичной минимизации невязок, (2.40) | $0.551 + 0.444 = 0.995$            | $1.008 + 0.110 = 1.118$               |
| Метод минимаксов модулей невязок сопряжения, (2.40)  | $0.551 + 0.416 = 0.967$            | $1.008 + 0.069 = 1.077$               |
| Метод коллокационной минимизации невязок, (2.40)     | $0.551 + 0.370 = 0.921$            | $1.008 + 0 = 1.008$                   |

Относительные поправки к теории тонких пластин показаны на рисунке 2.5.

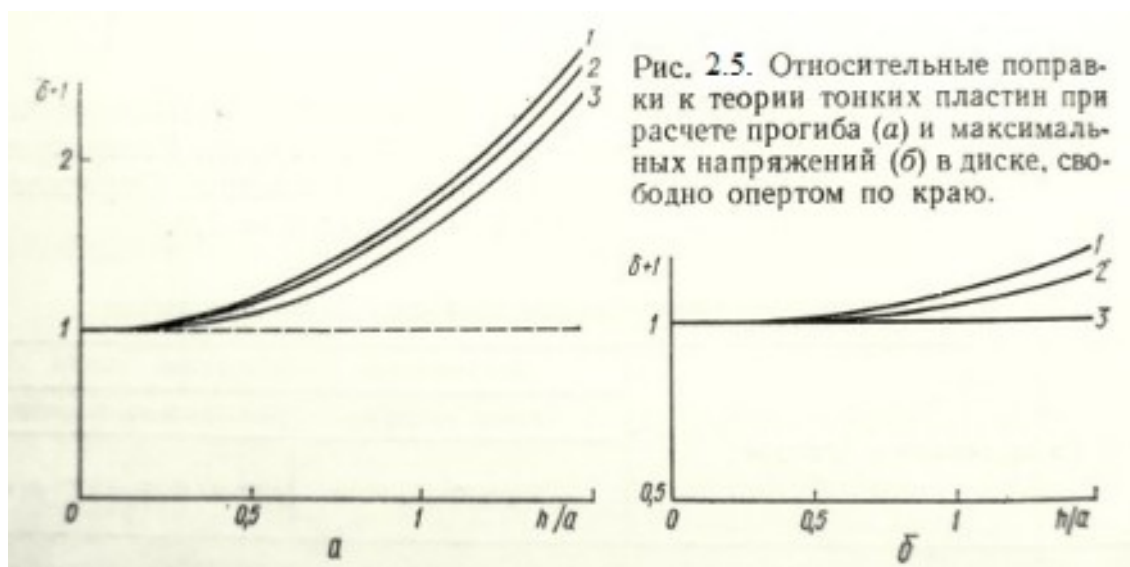


Рис. 2.5. Относительные поправки к теории тонких пластин при расчёте прогиба (а) и максимальных напряжений (б) в диске, свободно опертом по краю.

Рисунок 2.5. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия с единичной ординатой) при расчёте стрелы прогиба (а) и максимальных напряжений (б) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, свободно опертого по краю.

Все уточняющие методы минимизации невязок сопряжения дают формулы одинаковой степени сложности, ненамного большей, чем сложность формул теории тонких пластин. Ей соответствует первое слагаемое формул всех уточняющих методов минимизации невязок сопряжения.

Все уточняющие методы минимизации невязок сопряжения обобщают теорию тонких пластин.

Она является предельным случаем этих методов при  $h \ll a$ .

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы, отличающиеся лишь коэффициентами в уточняющих слагаемых.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 67/244

Поэтому отношения разностей значений, получаемых по этим формулам, не зависят от  $a$ ,  $h$  и  $\mu$ .

Среди предложенных методов минимизации невязок сопряжения наибольшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения даёт метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, промежуточные значения – метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей,

наименьшие значения – метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Отношение этих наибольшего и наименьшего значений для стрелы прогиба лежит в довольно узком интервале между 1 при  $h \ll a$ , то есть для очень тонких пластин, и 1.2 при  $a \ll h$ , то есть для очень толстых сплошных трёхмерных цилиндрических тел (элементов).

Теоретически аналогичное отношение для максимального напряжения лежит в интервале от 1 при  $h \ll a$ , то есть для очень тонких пластин, до плюс бесконечности при  $a \ll h$ , то есть для очень толстых сплошных трёхмерных цилиндрических тел (элементов).

Однако в широком диапазоне относительных толщин, характерных для светопрозрачных элементов для высоких давлений, оба указанных отношения составляют примерно 1.1.

Во всех случаях метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт промежуточный результат, при этом отрезок между крайними значениями делится в отношении 3:5, если считать от большего значения.

Теория тонких пластин в случае именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) весьма значительно занижает стрелу прогиба и в меньшей степени максимальные напряжения.

При характерных для иллюминаторов для высоких давлений относительных толщинах светопрозрачных элементов результаты занижаются примерно в 1.8 и 1.1 раза соответственно.

Поскольку граничные условия на основаниях трёхмерного цилиндрического тела (элемента) выполнены точно, то погрешность решения характеризуется отклонением от нуля радиального напряжения на боковой поверхности  $\sigma_r(a, z)$  в сравнении с радиальным и равным ему тангенциальным (окружным) напряжениями на оси

$$\sigma_r(0, z) = \sigma_t(0, z).$$

Такое сопоставление даёт завышенную оценку погрешности, поскольку отклонение на краю в среднем нулевое и его влияние уменьшается к оси.

На рисунке 2.6 в прежнем масштабе показаны определённые по формулам (2.40) эпюры относительных напряжений, построенные на отрезке  $[0, h]$  прямой  $r = a$  (эпюры I величины  $\sigma_r(a, z)/p$  и построенные на отрезке  $[0, h/2]$  оси эпюры II величины

$$\sigma_r(0, z)/p = \sigma_t(0, z)/p,$$

центрально симметричные относительно точки

$$r = 0, z = h/2).$$

Численные значения при каждом из трёх методов минимизации невязок сопряжения определены при

$$a = 55 \text{ мм}, h = 60 \text{ мм}, \mu = 0.2$$

(оптическое стекло).

Оказывается, что даже при столь большой относительной толщине погрешность решения невелика по сравнению с максимальными напряжениями.

Сопоставление трёх методов минимизации невязок сопряжения показывает, что погрешность минимальна (кривые 2) и в абсолютном, и в относительном смысле при методе минимизации невязок сопряжения обеспечением минимакса модуля радиального напряжения  $\sigma_r(a, z)$ .

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) такой подход и наиболее логичен, поскольку радиальное напряжение  $\sigma_r(r, z)$  распределяется нелинейно по толщине и его определение по моменту является весьма условным.

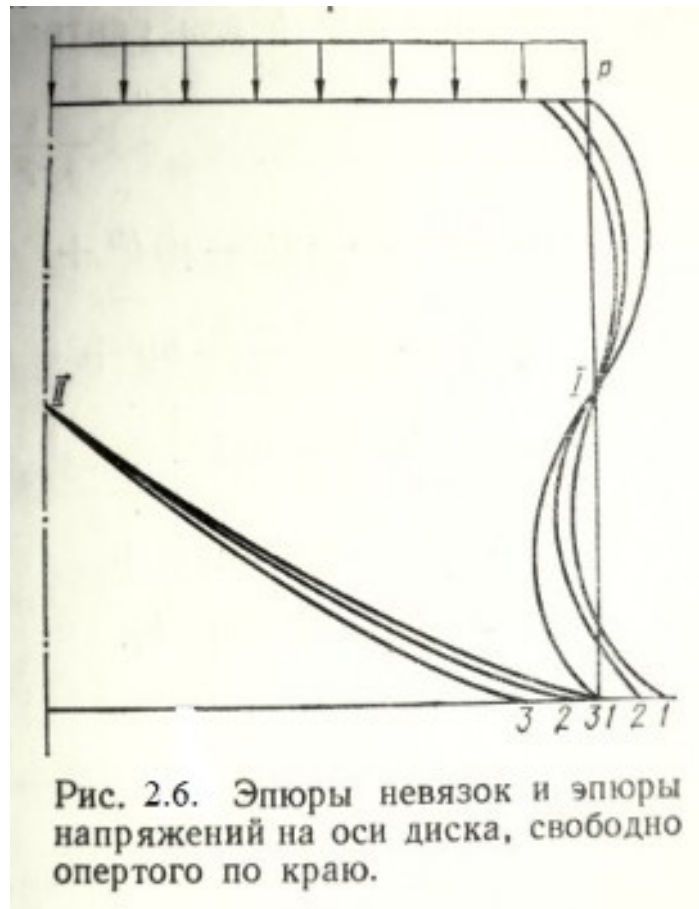


Рис. 2.6. Эпюры невязок и эпюры напряжений на оси диска, свободно опертого по краю.

Рисунок 2.6. Эпюры невязок и эпюры напряжений на оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), свободно опёртого по краю.

Немного большие напряжения даёт метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, совпадающий с аннулированием среднего значения и изгибающего момента (кривые 1).

Дальше от кривых 2 по сравнению с кривыми 1 в противоположную сторону стоят кривые 3, соответствующие методу коллокационной минимизации невязок сопряжения (аннулированию четырёх значений – среднего, на торцах и посередине).

Последовательности кривых монотонны по каждую сторону от середины  $z = h/2$  толщины, в середине толщины кривые совпадают, а при переходе через неё последовательность меняется на обратную.

Кривые на краю и в центре идут в одной и той же самой последовательности.

Более того, промежутки (отсчитываемые вдоль радиуса) между эпюрами на краю и эпюрами на оси совпадают.

Это не случайно.

При всех трёх методах минимизации невязок сопряжения величины  $\sigma_r(a, z)$  получаем

$$\sigma_r(0, z)/p - \sigma_r(r, z)/p = (3/8)(3 + \mu)(1 - 2z/h)r^2/h^2.$$

Итак, удовлетворительны все три метода минимизации невязок сопряжения.

Наихудший из них – третий (метод коллокационной минимизации невязок сопряжения с аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине); кривые 3 наиболее удалены от остальных двух), наилучший в сопоставлении с максимальными напряжениями на оси – второй (метод минимизации невязок сопряжения обеспечением минимакса модуля; относительная погрешность не превышает 6.2 %).

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 69/244

Наилучший в сопоставлении с полным распределением напряжений на оси – первый (метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения; относительная погрешность – менее 9.7 % у нижнего торца).

## 2.7. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание опёртого по окружности меньшего радиуса сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента

Теория осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание круглой пластины, свободно опёртой по окружности меньшего радиуса, математически строго проанализирована и обобщена теорией осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного существенно трёхмерного цилиндрического тела, свободно опёртого по окружности меньшего радиуса.

Граничные условия для осевого  $u_z(r, z)$  перемещения, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле (элементе), опёртом на узкое кольцо радиусом  $a_1$  ( $0 < a_1 < a$ ), показаны на рис. 1.6, а:

$$(2.41)$$
$$\begin{aligned}\sigma_z(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_z(r, h) &= -p \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, h) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_r(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h); \\ \tau_{rz}(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h); \\ u_z(a_1, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Используется общепринятый метод сечений.

Именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело радиусом  $a$  пересекается соосной цилиндрической поверхностью радиусом  $a_1$  на круглую центральную часть 1 (сплошной трёхмерный цилиндрический элемент) радиусом  $a_1$  и кольцевую периферическую часть 2 (кольцевой трёхмерный цилиндрический элемент) радиусами  $a_1$  и  $a$ .

Обозначаются

$$b = a_1/h$$

и, как и прежде,

$$c = a/h.$$

Поскольку две постоянные  $a_{11}$  и  $a_{20}$  есть и в формулах (2.23) – (2.25) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), и в формулах (2.27) – (2.29) для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) как для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, и могут принимать для них различные значения, то в формулах (2.23) – (2.25) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) для различия приняты прежние обозначения (2.31):

$$\begin{aligned}x &= a_{11}, \\ y &= a_{20}.\end{aligned}$$

Чтобы не смешивать одноимённые перемещения и напряжения для круглой центральной 1 и кольцевой периферической 2 частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, целиком, возможно добавление к обозначениям перемещений и напряжений индекса 1 для круглой центральной части 1 и индекса 2 для кольцевой периферической части 2 сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) целиком.

Для изгиба равномерным давлением на одно основание опёртого по окружности меньшего радиуса именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, в первом уравнении (2.26)  $K_2 = 0$ .

Вводятся произвольные суммарные (с поглощением других наличных постоянных, в данном случае

$$- 3(1 - \mu)/16 b^4 + 16(1 - \mu)/\mu b^2 y$$

и

$$8(1 - \mu)a_{10} + 2(1 - 2\mu)a_{02} + 8(1 - \mu)b_{10} + 4(1 - \mu)/\mu b_{10} \ln b + 16(1 - \mu)/\mu a_{20} b^2 + 8(1 - \mu)/\mu b_{20} b^2 + 16(1 - \mu)/\mu b_{20} b^2 \ln b - (3/16)(1 - \mu)b^4$$

соответственно) постоянные  $C_1$  и  $C_2$  для осевых перемещений в соотношения (2.24) и (2.25) для круглой центральной части 1 и в соотношения (2.28) и (2.29) для кольцевой периферической части 2 именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Одноимённые выражения для безразмерных радиального  $u_r(\rho, \zeta)$  и осевого  $u_z(\rho, \zeta)$  перемещений и для безразмерных радиального  $\sigma_r(\rho, \zeta)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$ , осевого  $\sigma_z(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{r\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений при  $\rho = b$  приводятся для наглядности сопоставлений попарно – сначала для круглой центральной части 1 и вслед за этим для кольцевой периферической части 2 именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$\begin{aligned} u_{r1}(b, \zeta) &= - 2bx - (3/8)(1 - \mu)b^3 + [- 32(1 - \mu)/\mu by + (3/4)(1 - \mu)b^3]\zeta + (3/2)(2 - \mu)b\zeta^2 - (2 - \mu)b\zeta^3; \\ u_{r2}(b, \zeta) &= - b_{01}b^{-1} - 2a_{11}b + 8(1 - \mu)/\mu b_{20}b - (3/8)(1 - \mu)b^3 + 16(1 - \mu)/\mu b_{20}b \ln b + [- 4(1 - \mu)/\mu b_{10} b^{-1} - \\ & 32(1 - \mu)/\mu (a_{20} + b_{20})b - 32(1 - \mu)/\mu b_{20}b \ln b + (3/4)(1 - \mu)b^3]\zeta + [- 16(2 - \mu)/\mu b_{20} b^{-1} + (3/2)(2 - \\ & \mu)b]\zeta^2 + [(32/3)(2 - \mu)/\mu b_{20} b^{-1} - (2 - \mu)b]\zeta^3; \\ u_{z1}(b, \zeta) &= C_1 + 4\mu/(1 - \mu) x\zeta + (3/2)\mu b^2\zeta + 32y\zeta^2 - (3/2)\mu b^2\zeta^2 - (1 + \mu)\zeta^3 + (1/2)(1 + \mu)\zeta^4; \\ u_{z2}(b, \zeta) &= C_2 + [4\mu/(1 - \mu) a_{11} - 32b_{20} - 32b_{20} \ln b + (3/2)\mu b^2]\zeta + [32a_{20} + 48b_{20} + 32b_{20} \ln b - (3/2)\mu b^2]\zeta^2 \\ & - (1 + \mu)\zeta^3 + (1/2)(1 + \mu)\zeta^4; \\ \sigma_{r1}(b, \zeta) &= - 2(1 + \mu)/(1 - \mu) x - (3/8)(3 + \mu)b^2 + [- 32(1 + \mu)/\mu y + (3/4)(3 + \mu)b^2]\zeta + (3/2)(2 + \mu)\zeta^2 - \\ & (2 + \mu)\zeta^3; \\ \sigma_{r2}(b, \zeta) &= b_{01}b^{-2} - 2(1 + \mu)/(1 - \mu) a_{11} + 8(3 + \mu)/\mu b_{20} + 16(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln b - (3/8)(3 + \mu)b^2 + [4(1 - \\ & \mu)/\mu b_{10}b^{-2} - 32(1 + \mu)/\mu a_{20} - 32(2 + \mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln b + (3/4)(3 + \mu)b^2]\zeta + [16(2 - \mu)/\mu \\ & b_{20}b^{-2} + (3/2)(2 + \mu)]\zeta^2 + [- (32/3)(2 - \mu)/\mu b_{20}b^{-2} - (2 + \mu)]\zeta^3; \\ \sigma_{\varphi1}(b, \zeta) &= - 2(1 + \mu)/(1 - \mu) x - (3/8)(1 + 3\mu)b^2 + [- 32(1 + \mu)/\mu y + (3/4)(1 + 3\mu)b^2]\zeta + (3/2)(2 + \\ & \mu)\zeta^2 - (2 + \mu)\zeta^3; \\ \sigma_{\varphi2}(b, \zeta) &= - b_{01}b^{-2} - 2(1 + \mu)/(1 - \mu) a_{11} + 8(1 + 3\mu)/\mu b_{20} + 16(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln b - (3/8)(1 + 3\mu)b^2 + [- \\ & 4(1 - \mu)/\mu b_{10}b^{-2} - 32(1 + \mu)/\mu a_{20} - 32(1 + 2\mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln b + (3/4)(1 + 3\mu)b^2]\zeta + [- 16(2 \\ & - \mu)/\mu b_{20}b^{-2} + (3/2)(2 + \mu)]\zeta^2 + [(32/3)(2 - \mu)/\mu b_{20}b^{-2} - (2 + \mu)]\zeta^3; \\ \sigma_{z1}(b, \zeta) &= - 3\zeta^2 + 2\zeta^3; \\ \sigma_{z2}(b, \zeta) &= - 3\zeta^2 + 2\zeta^3; \\ \tau_{r\zeta1}(b, \zeta) &= b(3\zeta - 3\zeta^2). \\ \tau_{r\zeta2}(b, \zeta) &= (32\mu^{-1}b_{20}b^{-1} - 3b)(-\zeta + \zeta^2). \end{aligned}$$

Чтобы решение для целого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) было точным, необходимы тождественные по  $\zeta$  равенства

$$\begin{aligned} u_{r1}(b, \zeta) &= u_{r2}(b, \zeta), \\ u_{z1}(b, \zeta) &= u_{z2}(b, \zeta), \\ \sigma_{r1}(b, \zeta) &= \sigma_{r2}(b, \zeta), \\ \tau_{r\zeta1}(b, \zeta) &= \tau_{r\zeta2}(b, \zeta). \end{aligned}$$

Кроме того, на внешнем краю  $\rho = c$  кольцевой периферической части 2 целого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) должны тождественно аннулироваться безразмерные радиальное и сдвиговое напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{r2}(c, \zeta) &= b_{01}c^{-2} - 2(1 + \mu)/(1 - \mu) a_{11} + 8(3 + \mu)/\mu b_{20} + 16(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln c - (3/8)(3 + \mu)c^2 + [4(1 - \\ & \mu)/\mu b_{10}c^{-2} - 32(1 + \mu)/\mu a_{20} - 32(2 + \mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln c + (3/4)(3 + \mu)c^2]\zeta + [16(2 - \mu)/\mu \\ & b_{20}c^{-2} + (3/2)(2 + \mu)]\zeta^2 + [- (32/3)(2 - \mu)/\mu b_{20}c^{-2} - (2 + \mu)]\zeta^3; \\ \tau_{r\zeta2}(c, \zeta) &= (32\mu^{-1}b_{20}c^{-1} - 3c)(-\zeta + \zeta^2). \end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 71/244

Из выражений для безразмерных радиальных перемещений  $u_{\rho 1}(b, \zeta)$  и  $u_{\rho 2}(b, \zeta)$ , радиальных напряжений  $\sigma_{\rho 1}(b, \zeta)$  и  $\sigma_{\rho 2}(b, \zeta)$  и сдвиговых напряжений  $\tau_{\rho \zeta 1}(b, \zeta)$  и  $\tau_{\rho \zeta 2}(b, \zeta)$  при  $\rho = b$  видно, что необходимо условие

$$b_{20} = 0.$$

В то же время на внешнем краю  $\rho = c$  кольцевой периферической части 2 целого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) аннулирование безразмерного сдвигового напряжения  $\tau_{\rho \zeta 2}(c, \zeta)$  требует в таком случае условия

$$c = 0,$$

а аннулирование безразмерного радиального напряжения  $\sigma_{\rho 2}(c, \zeta)$  требует условия

$$2 + \mu = 0.$$

Невозможность выполнения последних двух условий показывает, что построить точное решение не удаётся.

Приближённое решение получается следующим образом.

Аннулирование безразмерного сдвигового напряжения  $\tau_{\rho \zeta 2}(c, \zeta)$  выполняется точно принятием

$$b_{20} = (3/32)\mu c^2.$$

Аннулировать остальные невязки удаётся лишь приближённо – последовательным применением каждого из трёх методов минимизации невязок сопряжения.

Формулы приводятся в единой записи с учётом соотношений (2.36) и (2.37).

Минимизация безразмерного радиального напряжения  $\sigma_{\rho 2}(c, \zeta)$  на внешнем краю  $\rho = c$  кольцевой периферической части 2 трёхмерного цилиндрического тела (элемента) даёт

$$a_{11} = - (1/2)m(1 - \mu)/(1 + \mu) + (1/2)(1 - \mu)/(1 + \mu) b_{01}c^2 + (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/4)(1 - \mu)c^2 \ln c;$$

$$a_{20} = (1/16)(1 + m)\mu/(1 + \mu) + (1/8)(1 - \mu)/(1 + \mu) b_{01}c^2 - (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 - (3/32)\mu c^2 \ln c.$$

Минимизация невязки безразмерного радиального напряжения  $\sigma_{\rho 2}(b, \zeta) - \sigma_{\rho 1}(b, \zeta)$  приводит к формулам

$$x = - (1/2)m(1 - \mu)/(1 + \mu) - (1/2)(1 - \mu)/(1 + \mu) b_{01}(c^2 - b^2)/(c^2b^2) + (1/8)m(1 - \mu)(2 - \mu)/(1 + \mu) c^2/b^2 - (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/4)(1 - \mu)c^2 \ln(c/b);$$

$$y = (1/16)(1 + m)\mu/(1 + \mu) - (1/8)(1 - \mu)/(1 + \mu) b_{10}(c^2 - b^2)/(c^2b^2) - (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 - (3/32)\mu c^2 \ln(c/b).$$

Аналогично минимизируется невязка безразмерного радиального перемещения  $u_{\rho 2}(b, \zeta)$  и получаются

$$b_{01} = (1/4)m(2 - \mu)c^2 - (3/4)(1 - \mu)b^2c^2;$$

$$b_{10} = - (1/8)(1 + m)\mu(2 - \mu)/(1 - \mu) c^2 + (3/8)\mu b^2c^2.$$

Теперь находятся

$$x = - (1/8)m(1 - \mu)(2 + \mu)/(1 + \mu) - (3/16)(1 - \mu)(1 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/8)(1 - \mu)^2/(1 + \mu) b^2 + (3/4)(1 - \mu)c^2 \ln(c/b);$$

$$y = (1/64)(1 + m)\mu(2 + \mu)/(1 + \mu) + (3/128)\mu(1 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/64)\mu(1 - \mu)/(1 + \mu) b^2 - (3/32)\mu c^2 \ln(c/b);$$

$$a_{11} = - (1/8)m(1 - \mu)(2 + \mu)/(1 + \mu) - (3/8)(1 - \mu)^2/(1 + \mu) b^2 + (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/4)(1 - \mu)c^2 \ln c;$$

$$a_{20} = (3/160)\mu(2 + \mu)/(1 + \mu) + (3/64)\mu(1 - \mu)/(1 + \mu) b^2 - (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 - (3/32)\mu c^2 \ln c.$$

Кроме того, из выражения для безразмерного радиального перемещения  $u_{\rho 2}(b, \zeta)$  и из соотношения для безразмерного осевого перемещения

$$u_{\zeta 2}(b, 0) = 0$$

следуют

$$C_1 = - (1/4)(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/(1 + \mu) b^2 - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)/(1 + \mu) b^2c^2 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)/(1 + \mu) b^4 + (3/2)(1 - \mu)b^2c^2 \ln(c/b);$$

$$C_2 = - (1/4)(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/(1 + \mu) b^2 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)/(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) b^2c^2 - (3/2)(1 - \mu)b^2c^2 \ln(b^2/c) + (1/2)(1 + m)(2 - \mu)c^2 \ln b.$$

Формулы для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, представляются в размерных координатах:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

(2.42)

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{m(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [- (3/8)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (1/4)(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a/a_1) + [- m\mu(2 + \mu)/2 - (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + [(1 + m)\mu(2 - \mu)/2 + (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [- (1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [- (3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;$$

$$\tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h;$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

(2.43)

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{- (1/4)m(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + [(1/2)(1 + m)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4]z/h - (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 z^2/h^2 + (1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 z^3/h^3\}h/r + \{m(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)^2 a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) + [- (1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu)^2 a^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 (1 - 2z/h)r/h \ln(r/h) - (3/8)(1 - \mu^2)(1 - 2z/h)r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (1/4)(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)a_1^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + 5\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1^2/(ah)) + (1/2)(1 + m)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 \ln(a/h) + [- m\mu(2 + \mu)/2 - (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + [(1 + m)\mu(2 + \mu)/2 + (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [- (1/2)(1 + m)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z/h + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = \{(1/4)m(2 - \mu)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu)a_1^2 a^2/h^4 + [- (1/2)(1 + m)(2 - \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu)a_1^2 a^2/h^4]z/h + (3/2)(2 - \mu)a^2/h^2 z^2/h^2 - (2 - \mu)a^2/h^2 z^3/h^3\}h^2/r^2 + m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h) + [- (1 + m)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 (1 - 2z/h) \ln(r/h) + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = \{- (1/4)m(2 - \mu)a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2 a^2/h^4 + [(1/2)(1 + m)(2 - \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2 a^2/h^4]z/h - (3/2)(2 - \mu)a^2/h^2 z^2/h^2 + (2 - \mu)a^2/h^2 z^3/h^3\}h^2/r^2 + m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(- 1 + 5\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h) + [- (1 + m)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(- 1 + 5\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 (1 - 2z/h) \ln(r/h) + [- (3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 73/244

$$\tau_{rz}(r, z)/p = (-3a^2z/h^3 + 3a^2z^2/h^4)h/r + (3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$$

С точки зрения оптических свойств именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, рациональным представляется аннулирование прогиба центра поверхности низкого давления.

Согласно второй из формул (2.42) при этом

$\ln(a/a_1) = (1/4)(1 + 3\mu)/(1 + \mu) + (1/8)(3 - 5\mu)/(1 + \mu) a_1^2/a^2 + (2/3)(1/4)(1 + \mu)(2 + \mu)/(1 + \mu) h^2/a^2$ , то есть наилучший радиус опорной окружности не зависит от толщины лишь для тонкого сплошного цилиндрического элемента

$$(h \ll a_1).$$

Полученное решение (2.42) и (2.43) позволяет путём интегрирования по ширине опорного кольца согласно принципу наложения (суперпозиции) учесть произвольное осесимметричное распределение контактного давления на сплошной трёхмерный цилиндрический элемент.

В таблице 2.3 сопоставлены известный и предложенные методы расчёта именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, опёртого на узкое кольцо меньшего радиуса.

Таблица 2.3. Безразмерная стрела прогиба и наибольшее напряжение при изгибе равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), опёртого на узкое кольцо меньшего радиуса.

| Метод расчёта и номер формулы                        | Безразмерная характеристика изгиба |                                       |
|--|------------------------------------|---------------------------------------|
|  | Стрела прогиба                     | Наибольшее напряжение                 |
|  | $-u_z(0, 0)E/(ph)$                 | $\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_t(0, 0)/p$ |
| Теория тонких пластин, таблица 1.2                   | 0.121                              | 0.415                                 |
| Метод среднеквадратичной минимизации невязок, (2.42) | $0.121 + 0.265 = 0.386$            | $0.415 + 0.110 = 0.525$               |
| Метод минимаксов модулей невязок сопряжения, (2.42)  | $0.121 + 0.248 = 0.369$            | $0.415 + 0.069 = 0.484$               |
| Метод коллокационной минимизации невязок, (2.42)     | $0.121 + 0.221 = 0.342$            | $0.415 + 0 = 0.415$                   |

Рассмотрены безразмерная стрела прогиба центральной части и максимальное напряжение и определены их численные значения при

$$a = 55 \text{ мм}; a_1 = 42.5 \text{ мм}; h = 60 \text{ мм}; \mu = 0.2 \text{ (оптическое стекло)}.$$

На рисунке 2.7 показаны относительные поправки к теории тонких пластин при таком значении  $\mu$ .

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы одинаковой степени сложности, отличающиеся от формул теории тонких пластин наличием более простого по сравнению с остальными уточняющего слагаемого.

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения обобщают теорию тонких пластин, являющуюся их предельным случаем при  $h \ll a_1$ , и дают формулы, отличающиеся лишь коэффициентами в уточняющих слагаемых. Поэтому отношения разностей значений, получаемых по этим формулам, не зависят от  $a$ ,  $h$  и  $\mu$ .

Среди предложенных методов минимизации невязок сопряжения наибольшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения даёт метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, наименьшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения – метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

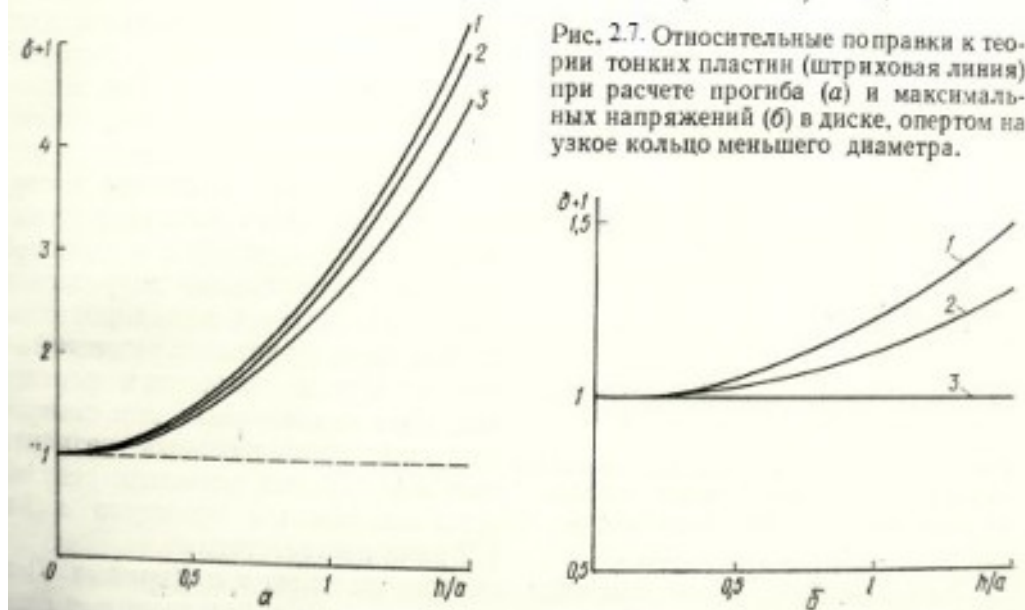


Рисунок 2.7. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия с единичной ординатой) при расчёте стрелы прогиба (а) и максимальных напряжений (б) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, опёртого на узкое кольцо меньшего радиуса.

При типичных для иллюминаторов для высоких давлений относительных размерах светопрозрачных элементов отношения наибольших значений к наименьшим для стрелы прогиба и максимального напряжения составляют примерно 1.12 и 1.25 соответственно, а вообще они изменяются оба от 1 при  $h \ll a_1$  до 1.2 (стрела прогиба) и до плюс бесконечности (максимальное напряжение) при  $a \ll h$ . Метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт промежуточное значение, делящее отрезок между крайними значениями в отношении 3:5, если считать от большего значения.

Теория тонких пластин в случае именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) весьма значительно занижает стрелу прогиба и в меньшей степени максимальное напряжение (она соответствует методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине).

При характерных для иллюминаторов для высоких давлений относительных размерах светопрозрачных элементов результаты для стрелы прогиба и для максимального напряжения занижаются теорией тонких пластин примерно в 3 и 1.2 раза соответственно.

Как изложено выше, имеются невязки на краю в  $\sigma_r(r, z)$  (кривые I) и над опорой в  $\sigma_r(r, z)$  (кривые II) и в  $u_r(r, z)$  (кривые III); в безразмерном виде (напряжения делятся на  $p$ , перемещения – на  $ph/E$ ) в прежнем масштабе соответствующие эпюры невязок показаны на рисунке 2.8.

В расчётах приняты  $a = 55$  мм;  $a_1 = 42.5$  мм;  $h = 60$  мм;  $\mu = 0.2$  (оптическое стекло).

Здесь же для сравнения показаны построенные на оси эпюра прогиба относительно точки над опорой на той же высоте (кривые IV) и половина эпюры радиального и равно ему тангенциального (окружного) напряжений на оси (кривые V); другая половина получается из приведённой преобразованием центральной симметрии относительно точки  $r = 0$ ;  $z = h/2$ .

Погрешности оказываются выше, чем при свободном опирании края (см. рис. 2.5).

Дело в том, что центральная часть имеет большую относительную толщину, чем именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело в целом. Кроме того, невязка не одна, их три, и невязки имеются не на одной, а на двух цилиндрических поверхностях.

Эпюры центрально симметричны, за исключением зеркально симметричной эпюры прогиба (эпюра сдвигается при переходе от одного метода минимизации невязок к другому).



Рис. 2.8. Эпюры невязок и эпюры прогибов и напряжений в диске, опёртом на узкое кольцо меньшего диаметра.

Рисунок 2.8. Эпюры невязок и эпюры прогибов и напряжений именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, опёртого на узкое кольцо меньшего радиуса.

Остальные тройки эпюр имеют веерообразный вид.

Наилучшим является метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей; несколько хуже метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения; уступает другим метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

## 2.8. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при равномерном противодействии на кольцевую периферическую часть другого основания со свободной круглой центральной частью

Теория осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание круглой пластины, уравновешиваемой повышенным равномерным противодействием на кольцевую периферическую часть другого основания, математически строго проанализирована и обобщена теорией осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного существенно трёхмерного цилиндрического тела, уравновешиваемого повышенным равномерным противодействием на кольцевую периферическую часть другого основания.

Граничные условия для осевого  $u_z(r, z)$  перемещения, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) радиусом  $a$  и толщиной (высотой)  $h$  при давлении  $p$  на верхнее основание, опёртого на широкое кольцо внутренним радиусом  $a_1$  ( $0 < a_1 < a$ ) и

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 76/244

внешним радиусом  $a$  и удерживаемого в равновесии контактным давлением опоры на нижнее основание, в предположении [67] равномерного вдоль радиуса распределения контактного давления

$$p_2 = pa^2/(a^2 - a_1^2)$$

кольца на сплошной трёхмерный цилиндрический элемент показаны на рис. 1.6, б):

$$(2.44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a_1); \\ \sigma_z(r, 0) &= -pa^2/(a^2 - a_1^2) \quad (a_1 < r \leq a); \\ \sigma_z(r, h) &= -p \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, h) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_r(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h); \\ \tau_{rz}(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h); \\ u_z(a_1, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Используется общепринятый метод сечений.

Именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело радиусом  $a$  рассекается соосной цилиндрической поверхностью радиусом  $a_1$  на круглую центральную часть 1 (сплошной трёхмерный цилиндрический элемент) радиусом  $a_1$  и кольцевую периферическую часть 2 (кольцевой трёхмерный цилиндрический элемент) радиусами  $a_1$  и  $a$ .

Обозначаются, как и прежде,  $b = a_1/h$ ,  $c = a/h$ .

Поскольку две постоянные  $a_{11}$  и  $a_{20}$  есть и в формулах (2.23) – (2.25) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), и в формулах (2.27) – (2.29) для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) как для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, и могут принимать для них различные значения, то в формулах (2.23) – (2.25) для различения используются прежние обозначения (2.31):

$$\begin{aligned} x &= a_{11}, \\ y &= a_{20}. \end{aligned}$$

Чтобы не смешивать одноимённые перемещения и напряжения для круглой центральной 1 и кольцевой периферической 2 частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) целиком, возможно добавление к обозначениям перемещений и напряжений индекса 1 для круглой центральной части 1 и индекса 2 для кольцевой периферической части 2 именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) целиком.

По условию равновесия именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, контактное давление на нижнее основание кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  равно  $pa^2/(a^2 - a_1^2)$ .

Поэтому в формулах (2.28) и (2.29) для кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) принимается  $K_2 = a^2/(a^2 - a_1^2) = c^2/(c^2 - b^2)$ .

Вводятся, как и прежде, произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в выражения (2.25) и (2.28) по обе стороны от секущей цилиндрической поверхности и составляются выражения (2.24), (2.25), (2.28) и (2.29) при  $\rho = b$  для круглой центральной части (они те же, что и в предыдущем случае) и для кольцевой периферической части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), а также выражения (2.29) для  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\zeta}$  при  $\rho = c$ .

Все выражения для кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, зависят от  $K_2$  и получаются простой подстановкой  $\rho = b$  и  $\rho = c$  в формулы (2.28) и (2.29).

И здесь достичь точного решения задачи не удаётся, так как для аннулирования безразмерного радиального напряжения  $\sigma_r(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$  необходимо условие  $b_{20} = 0$ , но тогда нельзя аннулировать безразмерное сдвиговое напряжение  $\tau_{r\zeta}(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 77/244

Приближённое решение для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) строится путём сопряжения решений для круглой центральной  $0 \leq r \leq a_1$  и кольцевой периферической  $a_1 \leq r \leq a$  частей тела (элемента).

Аннулирование безразмерного сдвигового напряжения  $\tau_{r\zeta}(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$  даёт

$$b_{20} = - (3/32)\mu b^2 c^2 / (c^2 - b^2).$$

Остальные невязки минимизируются последовательно по каждому из трёх методов минимизации невязок сопряжения. Формулы приводятся в единой записи с учётом выражений (2.36) и (2.37). Минимизация безразмерного радиального напряжения  $\sigma_r(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$  приводит к формулам

$$a_{11} = (1/2)m(1 - \mu)/(1 + \mu) b^2/(c^2 - b^2) - (1/2)\mu/(1 + \mu) c^2/(c^2 - b^2) - (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) - (3/4)(1 - \mu) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) \ln c + (1/2)(1 - \mu)/(1 + \mu) 1/c^2 b_{01};$$

$$a_{20} = - (1/16)(1 + m)\mu/(1 + \mu) b^2/(c^2 - b^2) + (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) + (3/32)\mu b^2 c^2 / (c^2 - b^2) \ln c + (1/8)(1 - \mu)/(1 + \mu) 1/c^2 b_{10}.$$

Минимизация невязки сопряжения безразмерного радиального напряжения  $\sigma_r(b, \zeta)$  на цилиндрической поверхности сопряжения  $\rho = b$  круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

$$\sigma_r(b + 0, \zeta) - \sigma_r(b - 0, \zeta)$$

даёт

$$x = - (1/2)m(1 - \mu)/(1 + \mu) - (3/4)(1 - \mu) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) \ln(c/b) - (1/2)(1 - \mu)/(1 + \mu) (c^2 - b^2) / (b^2 c^2) b_{01};$$

$$y = (1/16)(1 + m)\mu/(1 + \mu) + (3/32)\mu b^2 c^2 / (c^2 - b^2) \ln(c/b) - (1/8)(1 - \mu)/(1 + \mu) (c^2 - b^2) / (b^2 c^2) b_{10}.$$

При аннулировании невязки сопряжения безразмерного радиального перемещения  $u_r(b, \zeta)$  на цилиндрической поверхности сопряжения  $\rho = b$  круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

$$u_r(b + 0, \zeta) - u_r(b - 0, \zeta)$$

получаются

$$b_{01} = (1/2)(\mu - m(1 - \mu)) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) + (3/8)(1 - \mu) b^4 c^2 / (c^2 - b^2);$$

$$b_{10} = (1/4)(1 + m)\mu b^2 c^2 / (c^2 - b^2) - (3/16)\mu b^4 c^2 / (c^2 - b^2).$$

Находятся

$$x = - (1/4)(1 - \mu)/(1 + \mu) (\mu + m(1 + \mu)) - (3/16)(1 - \mu)^2 / (1 + \mu) b^2 - (3/4)(1 - \mu) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) \ln(c/b);$$

$$y = (1/32)(1 + m)\mu + (3/128)\mu(1 - \mu)/(1 + \mu) b^2 + (3/32)\mu b^2 c^2 / (c^2 - b^2) \ln(c/b);$$

$$a_{11} = (1/4)(1 - \mu)/(1 + \mu) (\mu + m(1 + \mu)) b^2 / (c^2 - b^2) - (1/2)\mu/(1 + \mu) c^2 / (c^2 - b^2) - (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) + (3/16)(1 - \mu)^2 / (1 + \mu) b^4 / (c^2 - b^2) - (3/4)(1 - \mu) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) \ln c;$$

$$a_{20} = - (1/32)(1 + m)\mu b^2 / (c^2 - b^2) + (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) - (3/128)\mu(1 - \mu)/(1 + \mu) b^4 / (c^2 - b^2) + (3/32)\mu b^2 c^2 / (c^2 - b^2) \ln c.$$

Аннулирование безразмерных осевых перемещений  $u_z(b - 0, 0)$  и  $u_z(b + 0, 0)$  даёт

$$C_1 = - (1/2)(1 + m)(1 - \mu) b^2 - (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)/(1 + \mu) b^4 - (3/2)(1 - \mu) b^4 c^2 / (c^2 - b^2) \ln(c/b);$$

$$C_2 = (1/2)(1 + m)(1 - \mu) b^4 / (c^2 - b^2) - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) b^4 c^2 / (c^2 - b^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)/(1 + \mu) b^6 / (c^2 - b^2) - (3/2)(1 - \mu) b^4 c^2 / (c^2 - b^2) \ln c - (1 + m)(1 - \mu) b^2 c^2 / (c^2 - b^2) \ln b + (9/4)(1 - \mu) b^4 c^2 / (c^2 - b^2) \ln b.$$

Формулы для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений сплошного трёхмерного цилиндрического тела представляются в размерных координатах:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

$$(2.45)$$

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{(1/2)m(1 - \mu^2) + (1/2)\mu(1 - \mu) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + (3/2)(1 - \mu^2) a_1^2 a^2 / h^4 \ln(a/a_1) + [-(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 - 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] z / h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu) z^2 / h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu) z^3 / h^3\} r / h + [-(3/8)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu^2) z / h] r^3 / h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 - (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu) a_1^4 / h^4 - (3/2)(1 - \mu^2) a_1^4 / h^4 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + [-m\mu(1 + \mu) - \mu^2 - (3/4)\mu(1 - \mu) a_1^2 / h^2 - 3\mu(1 + \mu) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] z / h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 - \mu) a_1^2 / h^2 + 3\mu(1 + \mu) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] z^2 / h^2 - (1 + \mu)^2 z^3 / h^3 + (1/2)(1 +$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 78/244

$$\mu^2 z^4/h^4 + [(1+m)(1-\mu^2)/2 + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1+\mu)z/h - (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2 r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = (1/2)m(1+\mu) + (1/2)\mu + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1) + [-(1+m)(1+\mu) - (3/4)(1-\mu)a_1^2/h^2 - 3(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2+\mu)z^2/h^2 - (2+\mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(3+\mu) + (3/4)(3+\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = (1/2)m(1+\mu) + (1/2)\mu + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1) + [-(1+m)(1+\mu) - (3/4)(1-\mu)a_1^2/h^2 - 3(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2+\mu)z^2/h^2 - (2+\mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(1+3\mu) + (3/4)(1+3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = -3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;$$

$$\tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h;$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) (2.46)

$$u_r(r, z)E/(ph) (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = \{[(1/2)m(1-\mu^2) - (1/2)\mu(1+\mu)]a^2/h^2 - (3/8)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + [-(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4]z/h + (3/2)(1+\mu)(2-\mu)a^2/h^2 z^2/h^2 - (1+\mu)(2-\mu)a^2/h^2 z^3/h^3\}h/r + \{-(1/2)m(1-\mu^2) + (1/2)\mu(1-\mu) + \mu a^2/a_1^2 + (3/8)(1-\mu)^2(a^2-a_1^2)/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) + [(1+m)(1-\mu^2) - (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 - 3(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h - (3/2)(1+\mu)(2-\mu)z^2/h^2 + (1+\mu)(2-\mu)z^3/h^3\}r/h - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 (1-2z/h)r/h \ln(r/h) + (3/8)(1-\mu^2)(1-2z/h)r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = (1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 - (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a_1^2 a^2/h^4 + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 - (1+m)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (9/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) - (3/2)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a/h) + [m\mu(1+\mu) + \mu^2 - a^2/a_1^2 + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/4)\mu(1+3\mu)a^2/h^2 - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + [-(1+m)\mu(1+\mu) - (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 - (3/4)\mu(1+3\mu)a^2/h^2 + 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z^2/h^2 + (1+\mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1+\mu)z/h + (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2 r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = \{[-(1/2)m(1-\mu) + (1/2)\mu]a^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)a_1^2 a^2/h^4 + [(1+m)(1-\mu)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu)a_1^2 a^2/h^4]z/h - (3/2)(2-\mu)a^2/h^2 z^2/h^2 + (2-\mu)a^2/h^2 z^3/h^3\}h^2/r^2 - (1/2)m(1+\mu) - (1/2)\mu - (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + [(1+m)(1+\mu) + (3/4)(1-\mu)a_1^2/h^2]z/h - (3/2)(2+\mu)z^2/h^2 + (2+\mu)z^3/h^3 + (3/2)(1+\mu)a^2/h^2 (1-2z/h) \ln(a/r) + [-(3/8)(3+\mu) + (3/4)(3+\mu)z/h](a^2 - r^2)/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = \{[(1/2)m(1-\mu) - (1/2)\mu]a^2/h^2 - (3/8)(1-\mu)a_1^2 a^2/h^4 + [-(1+m)(1-\mu)a^2/h^2 + (3/4)(1-\mu)a_1^2 a^2/h^4]z/h + (3/2)(2-\mu)a^2/h^2 z^2/h^2 - (2-\mu)a^2/h^2 z^3/h^3\}h^2/r^2 - (1/2)m(1+\mu) - (1/2)\mu - (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1-5\mu)a^2/h^2 + [(1+m)(1+\mu) + (3/4)(1-\mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1-5\mu)a^2/h^2]z/h - (3/2)(2+\mu)z^2/h^2 + (2+\mu)z^3/h^3 + (3/2)(1+\mu)a^2/h^2 (1-2z/h) \ln(a/r) + [(3/8)(1+3\mu) - (3/4)(1+3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = -a^2/a_1^2 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3;$$

$$\tau_{rz}(r, z)/p (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = (3a^2 z/h^3 - 3a^2 z^2/h^4)h/r + (-3z/h + 3z^2/h^2)r/h.$$

В таблице 2.4 сопоставлены известный и предложенные методы расчёта осесимметричного изгиба именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания со свободной круглой центральной частью. Рассмотрены безразмерная стрела прогиба круглой центральной части и безразмерное максимальное напряжение и определены их численные значения при  $a = 55$  мм;  $a_1 = 30$  мм;  $h = 60$  мм;  $\mu = 0.2$  (оптическое стекло).

На рисунке 2.9 показаны зависимости относительных поправок к теории тонких пластин от относительной толщины при таком значении  $\mu$ .

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы одинаковой степени сложности, отличающиеся от формул теории тонких пластин наличием более простого по сравнению с остальными уточняющего слагаемого.

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения обобщают теорию тонких пластин, являющуюся их предельным случаем при  $h \ll a_1$ .

Поскольку все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы, отличающиеся лишь коэффициентами в уточняющих слагаемых, то отношения разностей величин, получаемых по этим формулам, не зависят от  $a$ ,  $h$  и  $\mu$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 79/244

Таблица 2.4. Безразмерная стрела прогиба и наибольшее напряжение при осесимметричном изгибе именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания со свободной центральной частью.

| Метод расчёта и номер формулы                        | Безразмерная характеристика изгиба |                                       |
|--|------------------------------------|---------------------------------------|
|  | Стрела прогиба                     | Наибольшее напряжение                 |
|  | $-u_z(0, 0)E/(ph)$                 | $\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_t(0, 0)/p$ |
| Теория тонких пластин, таблица 1.2                   | 0.081                              | 0.463                                 |
| Метод среднеквадратичной минимизации невязок, (2.45) | $0.081 + 0.144 = 0.225$            | $0.463 + 0.220 = 0.683$               |
| Метод минимаксов модулей невязок сопряжения, (2.45)  | $0.081 + 0.135 = 0.216$            | $0.463 + 0.175 = 0.638$               |
| Метод коллокационной минимизации невязок, (2.45)     | $0.081 + 0.120 = 0.201$            | $0.463 + 0.100 = 0.563$               |

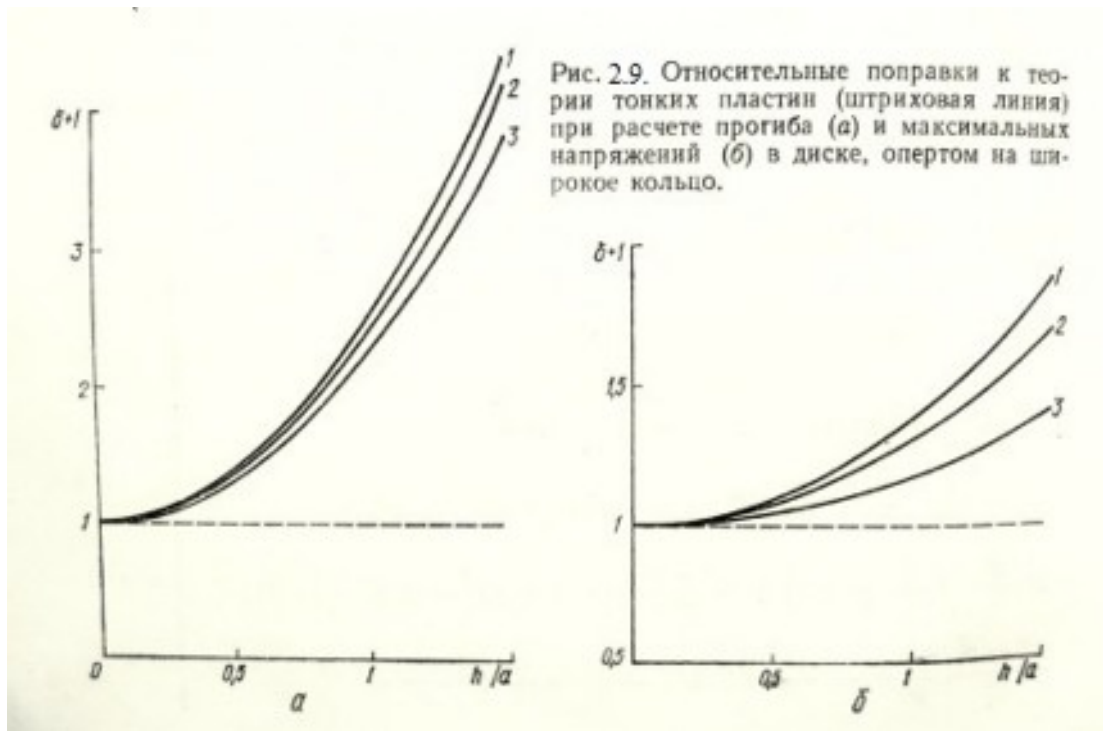


Рисунок 2.9. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия) при расчёте стрелы прогиба (а) и максимальных напряжений (б) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при изгибе равномерным давлением на одно основание и равномерным противодавлением на периферическую часть другого основания со свободной центральной частью.

Среди предложенных методов минимизации невязок сопряжения наибольшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения даёт метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, наименьшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения –



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 80/244

метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

При типичных для иллюминаторов для высоких давлений относительных размерах светопрозрачных элементов отношения указанных наибольшего и наименьшего значений стрелы прогиба и максимального напряжения составляют примерно 1.1 и 1.2 соответственно. Границы этих отношений – от 1 при  $h \ll a_1$  до 1.2 для стрелы прогиба и до  $1 + (1 + \mu)/(5\mu) = 2.2$  при значении  $\mu = 0.2$  для максимального напряжения при  $a \ll h$ .

Во всех случаях метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт промежуточное значение, которое делит отрезок между крайними значениями в отношении 3:5, если считать от большего значения.

Теория тонких пластин в случае именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, весьма значительно занижает значения стрелы прогиба и в меньшей степени максимального напряжения.

При характерных для иллюминаторов для высоких давлений относительных размерах светопрозрачных элементов результаты занижаются примерно в 2.6 и 1.4 раза соответственно.

Как изложено выше, имеются невязки в радиальном напряжении  $\sigma_r(r, z)$  над краями опоры.

Эпюры относительных (делённых на  $p$ ) невязок (кривые), построенные на соответствующих отрезках в прежнем масштабе, показаны на рис. 2.10.

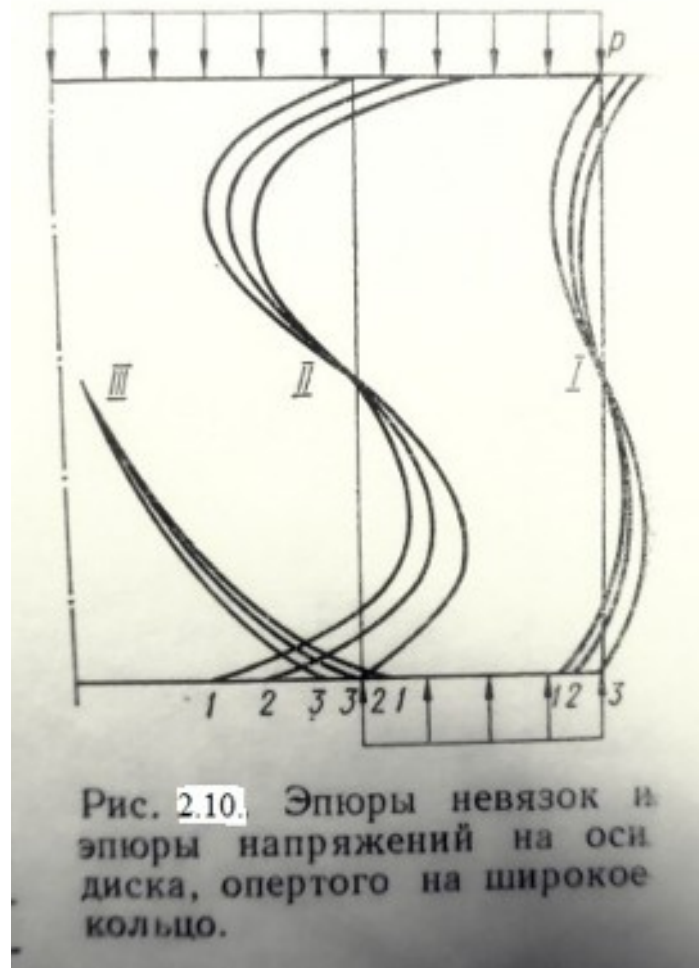


Рисунок 2.10. Эпюры невязок и эпюры напряжений на оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при изгибе равномерным давлением на одно основание и равномерным противодействием на периферическую часть другого основания со свободной центральной частью.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 81/244

В расчётах приняты значения  $a = 55$  мм;  $a_1 = 30$  мм;  $h = 60$  мм;  $\mu = 0.2$  (оптическое стекло).

В том же масштабе показана половина (кривая III) эпюры равных между собой радиального и окружного (тангенциального) напряжений на оси

(2.47)

$$\sigma_r(0, z)/p = \sigma_t(0, z)/p;$$

другая половина центрально симметрична показанной половине относительно точки, лежащей на срединной плоскости, но не на оси (смещение с оси связано с пуассоновым растяжением в радиальном направлении от осевого сжатия участка над опорой):

(2.48)

$$\sigma_r(0, h/2) = p\mu/4,$$

то есть пропорционально коэффициенту поперечной деформации Пуассона. Оказывается, невязка над внешним краем опоры невелика. Значительно более существенна невязка над внутренним краем опоры. Однако сопоставление расхождений кривых 1, 2, 3 показывает, что напряжения на оси при изменении метода минимизации невязок сопряжения изменяются значительно меньше, чем эти невязки.

И при равномерном противодействии на кольцевую периферическую часть сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) наилучшим методом минимизации невязок сопряжения является метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Ему несколько уступает метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей.

Уступает этим методам метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

## **2.9. Двухпараметрический метод минимизации невязки осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента**

По-прежнему используется понятие невязок сопряжения (Л. Б. Цвик [172]) как разностей выражений одноимённых величин, в частности перемещений и напряжений, для разных частей тела, имеющих общую границу, в точках этой границы, обобщается это понятие на случай границ целого тела с заданными граничными условиями посредством разностей граничных условий и соответствующих значений величин в точках этих границ и применяются различные рациональные методы минимизации невязок сопряжения.

Итоги минимизации на отрезке от нуля до единицы многочлена (2.32)

$$Q(\zeta) = A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3$$

по всем трём методам выше были представлены в единой записи с помощью числа  $m$  (2.36):

$m = 1/5$  по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения;

$m = 1/8$  по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей;

$m = 0$  по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Тем самым сразу для всех трёх методов выше была достигнута единообразная запись обеспечивающих минимизацию многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32) значений (2.37) постоянных  $A$  и  $B$ :

$$A = m/2;$$

$$B = -(1 + m).$$

Поскольку в итоге минимизации по всем этим трём методам многочлен  $Q(\zeta)$  (2.32) на отрезке от нуля до единицы достаточно близок к нулю, то для наглядности различий итогов применения этих трёх методов минимизации невязок сопряжения этот многочлен умножается на подходящую положительную постоянную  $K$ , например равную пяти ( $K = 5$ ).

Соответствующая геометрическая интерпретация для многочлена  $KQ(\zeta)$  показана на рисунке 2.11.

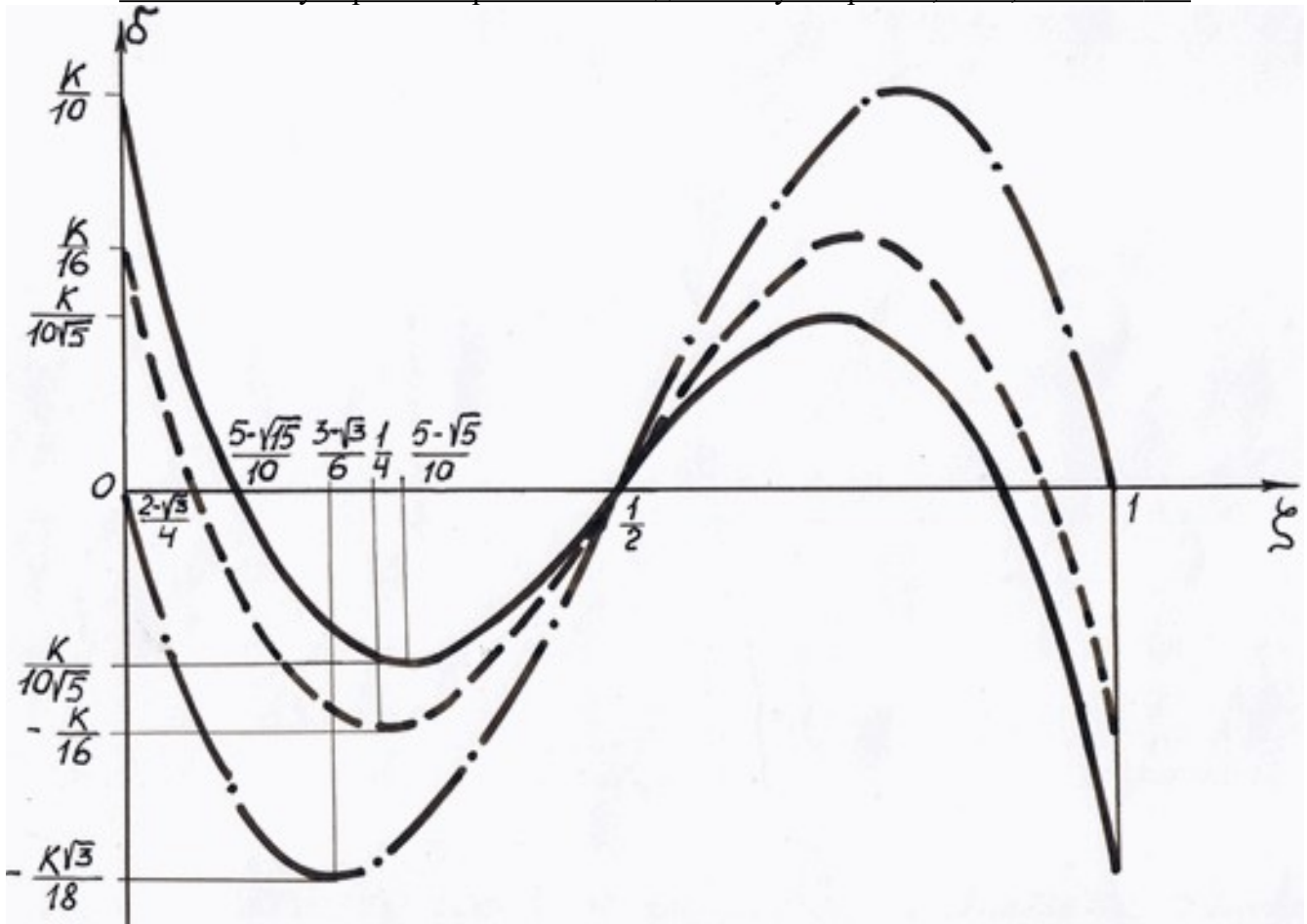


Рисунок 2.11. Графическая интерпретация (толстыми кривыми линиями) минимизации невязок сопряжения решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения (сплошная кривая), методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей (штриховая кривая) и методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине (штрихпунктирная кривая линия).

Кроме того, анализ приведённых выше решений для сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических тел (элементов) во всех четырёх теориях выше для различных условий уравновешивания показывает, что из двух произвольных постоянных  $C_1$  для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и  $C_2$  для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) в действительности существенна лишь одна их разность. Ведь увеличение или уменьшение этих двух постоянных на одну и ту же величину соответствует осевому перемещению условно разделённого на центральную и периферическую части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, целиком как абсолютно твёрдого тела. Поэтому можно зафиксировать одну любую точку этого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, целиком, а ввиду осевой симметрии тем самым соответствующую окружность, содержащую эту точку. По соображениям наглядности результатов исследований деформирования этого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, для удобства приложения этих результатов к расчётам жёсткости и оптических свойств и в связи с отсутствием точек этого тела целиком, являющихся заведомо

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 83/244

неподвижными, фиксируется центр  $(0, 0)$  его частично нагруженного внутреннего основания  $z = 0$  с ненагруженной центральной частью  $0 \leq r \leq a_1$ .

Тогда

$$C_1 = 0.$$

Представляется целесообразным сосредоточиться на избранной расчётной схеме четвёртой из этих теорий с равномерным противодействием на кольцевую периферическую часть основания  $z = 0$  с ненагруженной центральной частью условно разделённого на круглую центральную  $0 \leq r \leq a_1$  и кольцевую периферическую  $a_1 \leq r \leq a$  части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела целиком, в частности светопрозрачного элемента.

Имеет место невязка осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$(2.49)$$

$$\delta''_{\delta}(\zeta) = u_{\zeta}(b + 0, \zeta) - u_{\zeta}(b - 0, \zeta) = u_{\zeta 2}(b, \zeta) - u_{\zeta 1}(b, \zeta) = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \{ \delta + [-1 + (1 + m)\mu]\zeta - (1 + m)\mu\zeta^2 + (1 + \mu)(\zeta^3 - \zeta^4/2) \},$$

где вместо  $C_2$  введена находящаяся с ней в линейной зависимости постоянная  $\delta$ .

Никакой выбор постоянной  $\delta$  не позволяет аннулировать эту невязку  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  тождественно по  $\zeta$  на отрезке  $[0, 1]$  целиком, поэтому эту невязку  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  можно лишь минимизировать тем или иным выбором постоянной  $\delta$  по аналогии с минимизацией многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32).

Сущность созданного двухпараметрического (с параметрами  $m, \delta$ ) метода минимизации невязки осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, является следующей.

Среднеквадратичная минимизация невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  (метод 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения) выполняется стандартным методом.

В данном однопараметрическом случае зависимости  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  от единственной постоянной  $\delta$  среднеквадратичная минимизация  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  и аннулирование среднего интегрального  $\int_0^1 \delta''_{\delta}(\zeta) d\zeta$  приводят к совпадающим итогам

$$\delta = (1/60)(21 - 19\mu - 10m\mu).$$

Представляется логичным также принять  $m = 1/5$  по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32).

Тогда в итоге по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$\delta = (7/20)(1 - \mu).$$

Минимум модуля невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  (метод 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей)

$$\min_{\delta} \max_{0 \leq \zeta \leq 1} |\delta''_{\delta}(\zeta)|$$

достигается при условии

$$\delta = (1/4)(1 - \mu)$$

независимо от постоянной  $m$ .

Формулировка метода 3, в отличие от методов 1 и 2, требует изменения по сравнению с минимизацией многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32) по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения, что следует хотя бы из равносильности (эквивалентности) среднеквадратичной минимизации невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  (метод 1) и аннулирования среднего интегрального  $\int_0^1 \delta''_{\delta}(\zeta) d\zeta$ .

Поэтому аннулирование среднего интегрального  $\int_0^1 \delta''_{\delta}(\zeta) d\zeta$  здесь не должно приниматься во внимание.

В данной однопараметрической задаче минимизации невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  выбором целесообразного значения единственной постоянной  $\delta$  можно аннулировать лишь одно из трёх значений невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  в точках 0, 1/2 и 1, причём эти три варианта являются взаимно исключаящими.

В данном случае независимо от выбора значения постоянной  $\delta$

$$u_{\zeta}(b + 0, 1) - u_{\zeta}(b + 0, 0) = u_{\zeta 2}(b, 1) - u_{\zeta 2}(b, 0) < u_{\zeta}(b - 0, 1) - u_{\zeta}(b - 0, 0) = u_{\zeta 1}(b, 1) - u_{\zeta 1}(b, 0)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 84/244

и логично выбрать для минимизации по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения единственную точку  $\zeta = 1/2$ .

Тогда

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu - 8m\mu).$$

Представляется логичным также принять  $m = 0$  по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения многочлена  $Q(\zeta)$  (2.32).

Тогда в итоге по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu).$$

Итак,

$$(2.50)$$

$\delta = (7/20)(1 - \mu)$  при среднеквадратичной минимизации невязки  $\delta''_s(\zeta)$  (по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения);

$\delta = (1/4)(1 - \mu)$  при обеспечении минимакса модуля невязки  $\delta''_s(\zeta)$  (по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей);

$\delta = (1/32)(13 - 11\mu)$  при коллокационной минимизации невязки  $\delta''_s(\zeta)$  (по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения).

Тем самым завершена минимизация невязок сопряжения и подготовлена основа для получения формул, выражающих перемещения и напряжения в условно разделённом на круглую центральную и кольцевую периферическую части именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле целиком, в частности светопрозрачном элементе.

## **2.10. Создание двухпараметрического и однопараметрического методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения, однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения, открытие и обоснование первых трёх основных явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания**

Минимизация величин  $Q(\zeta)$  (2.32) и  $\delta''_s(\zeta)$  (2.49) не устраняет невязок на поверхности сопряжения  $r = b$  круглой центральной и кольцевой периферической частей и на боковой поверхности  $r = c$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, а лишь сводит невязки к минимуму.

Поэтому возможно лишь приближённое аналитическое решение поставленной задачи, несмотря на точное удовлетворение условию бигармоничности и граничным условиям на основаниях именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Приближённые методы решения упругих задач математически строго проанализированы и обобщены теорией и аналитическими методами устранения минимизированных невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения.

Поскольку точное выполнение условия бигармоничности не является самоцелью, а более важной для практики является близость значений перемещений и напряжений, подсчитываемых по соответствующим формулам, к истинным значениям перемещений и напряжений, то представляется целесообразным тем или иным приближённым методом устранить оставшиеся минимизированные невязки сопряжения.

Созданный метод устранения минимизированных невязок сопряжения устраняет (аннулирует) их добавлением невязок, изменяющихся в радиальном направлении от нулей в местах аннулирования (на оси для каждой невязки, а для каждой невязки на поверхности

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 85/244

сопряжения частей ещё и на внешней боковой поверхности) до значений, именно противоположных значениям соответствующих минимизированных невязок на соответствующих боковых поверхностях круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Исходя из характера полученных формул, их сопоставления с решением аналогичной задачи теории пластин, а также из анализа характера затухания возмущений от самоуравновешенных нагрузок (а невязки в нашем случае являются таковыми или близки к ним) в известных задачах теории упругости [49, 104, 105, 164, 166], созданный метод устранения минимизированных невязок сопряжения принимает квадратичный закон распределения добавленных невязок по радиусу.

Сущность и применение созданного метода устранения минимизированных невязок сопряжения достаточно показать на примере функции  $t(\rho)$ , когда устраняются невязки, указанные в квадратных скобках, а  $t(c + 0)$  соответствует условию на границе  $\rho = c$ :

$$(2.51)$$

$$T(\rho) = t(\rho) + (\rho^2/c^2)[t(c + 0) - t(c - 0)] + (1/2)(\rho^2/b^2)[t(b + 0) - t(b - 0)] \text{ при } 0 \leq \rho \leq b;$$

$$T(\rho) = t(\rho) + (\rho^2/c^2)[t(c + 0) - t(c - 0)] - (1/2)[(c - \rho)/(c - b)]^2[t(b + 0) - t(b - 0)] \text{ при } b \leq \rho \leq c.$$

Созданный метод устранения минимизированных невязок сопряжения полностью устраняет (аннулирует) минимизированные невязки сопряжения и даёт возможность именно точно выполнить граничные условия не только на плоских основаниях (торцах), но и на цилиндрических боковых поверхностях круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, то есть и на поверхности сопряжения частей  $\rho = b$ , и на внешней боковой поверхности  $\rho = c$  тела целиком.

С учётом влияния давления  $p_1$  на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, формулами (2.2а) по решению Ламе [104, 105, 164–166] для сплошного цилиндра согласно принципу наложения (суперпозиции) получают окончательные формулы для перемещений и напряжений, которые приводятся в размерном виде.

В центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, радиальное  $u_r(r, z)$  и осевое  $u_z(r, z)$  перемещения определяются следующими формулами:

$$(2.52)$$

$$u_{r1}(r, z) = (p/E)r \left\{ - (1 - \mu)(1/2 + p_1/p) + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/8)(1 - \mu^2) r^2/h^2](1 - 2z/h) + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3 \right\};$$

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \left\{ 2\mu(1/2 + p_1/p)z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - \frac{(1 + \mu)z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)z^4/h^4 + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 + (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2 \right\};$$

радиальное  $\sigma_r(r, z)$ , окружное (тангенциальное)  $\sigma_t(r, z)$ , осевое  $\sigma_z(r, z)$  и сдвиговое  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжения определяются следующими формулами:

$$(2.53)$$

$$\sigma_{r1}(r, z) = p \left\{ - (1/2 + p_1/p) + [(1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + (a_1^4 - a^4/2)/(a^2(a^2 - a_1^2)) [m - 2(1 + m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3]r^2/a_1^2 \right\};$$

$$\sigma_{t1}(r, z) = p \left\{ - (1/2 + p_1/p) + [(1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + (1/2)\mu a^2/(a^2 - a_1^2) [-(1 + m)(1 - 2z/h) - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3]r^2/a_1^2 \right\};$$

$$\sigma_{z1}(r, z) = p(-3z^2/h^2 + 2z^3/h^3);$$

$$\tau_{rz1}(r, z) = p(3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$$

В периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, радиальное  $u_r(r, z)$  и осевое  $u_z(r, z)$  перемещения определяются следующими формулами:

(2.54)

$$u_{r2}(r, z) = (p/E)ra_1^2/(a^2 - a_1^2) \{[-(1/2)(1 + \mu)a^2/r^2 + (1 - \mu)[1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p] + \mu a^2/a_1^2 + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)(a^2/r^2 - 1) + (3/8)(1 - \mu^2)[(a^2 - a_1^2)/h^2 - a_1^2 a^2/(h^2 r^2)] + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + (3/8)(1 - \mu^2)r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(r/h)](1 - 2z/h) + (2 - \mu)(a^2/r^2 - 1)(3/2 z^2/h^2 - z^3/h^3)\};$$

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{\delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2\};$$

радиальное  $\sigma_r(r, z)$ , окружное (тангенциальное)  $\sigma_t(r, z)$ , осевое  $\sigma_z(r, z)$  и сдвиговое  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжения определяются следующими формулами:

(2.55)

$$\sigma_{r2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) \{(1/2)a^2/r^2 + 1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu)(a^2/r^2 - 1) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 (a^2/r^2 - 1) + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/r) - (3/8)(3 + \mu)(a^2 - r^2)/h^2](1 - 2z/h) + [2 + \mu + (2 - \mu)a^2/r^2](-3/2 z^2/h^2 + z^3/h^3) + [r^2/a^2 + (1/2)a^2/a_1^2 (a - r)^2/(a - a_1)^2][m - 2(1 + m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3]\};$$

$$\sigma_{t2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) \{-(1/2)a^2/r^2 + 1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu)(a^2/r^2 - (1 + \mu)/(1 - \mu)) - (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 (a^2/r^2 + 1) + (3/8)(1 - 5\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/r) + (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) + [2 + \mu - (2 - \mu)a^2/r^2](-3/2 z^2/h^2 + z^3/h^3) + (1/2)\mu a^2/a_1^2 [(1 + m)(1 - 2z/h) + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3](a - r)^2/(a - a_1)^2\};$$

$$\sigma_{z2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) (-a^2/a_1^2 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3);$$

$$\tau_{rz2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) [a^2/(rh) - r/h](3z/h - 3z^2/h^2).$$

В формулах (2.52) – (2.55) значения  $m$  принимаются согласно (2.36), значения  $\delta$  при том же способе минимизации согласно (2.50) и подчеркнуты выражения, отсутствующие в решении соответствующей задачи теории пластин (их аннулирование даёт решение теории пластин).

Этот смешанный параметрический (с параметрами  $m, \delta$ ) метод устранения минимизированных невязок сопряжения с использованием двухпараметрического метода (с параметрами  $m, \delta$ ) устранения минимизированной невязки осевого перемещения в остальном является однопараметрическим (с параметром  $m$ ) методом.

Сущность этого **двухпараметрического** метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность выражается следующим собственным алгоритмом.

1. Исходными для этого двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения являются такие две формулы:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z1}(r, z)$  составляет

(2.45')

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \{(\mu + 2\mu p_1/p)z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4\};$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 87/244

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z2}(r, z)$  составляет

$$(2.46')$$

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ (1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2a^2/h^4 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1+3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2z^4/h^4 + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2a^2/h^4 + 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1+\mu)z/h + (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 \}.$$

Эти две формулы получаются из соответствующих формул (2.45) и (2.46), если в них учесть давление  $p_1$  на боковую поверхность по решению Ламе и выбрать произвольные слагаемые для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, так, чтобы, во-первых, аннулировать осевое перемещение

$$u_{z1}(0, 0) = 0$$

центра частично нагруженного основания  $z = 0$  и, во-вторых, уравнивать значения

$$u_{z1}(a_1, 0) = u_{z2}(a_1, 0)$$

осевого перемещения сопряжения обеих частей на этом основании.

Эти две формулы (2.45') и (2.46') привели к соответствующим формулам (2.52) и (2.54) посредством введения дополнительных слагаемых

$$(2.52): + (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1-\mu) - z/h + (1+m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2,$$

$$(2.54): \delta(1+\mu)a^2/a_1^2, - (1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1-\mu) - z/h + (1+m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a-r)^2/(a-a_1)^2$$

в фигурных скобках и могут быть получены обратно, если все эти дополнительные слагаемые исключить из соответствующих формул (2.52) и (2.54).

2. Произвольная постоянная осевого перемещения в круглой центральной части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, по-прежнему выбирается именно нулевой для аннулирования осевого перемещения центра частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(0, 0) = 0.$$

Тогда стрела прогиба текущего концентрического (осевая симметрия и связанные с нею концентричность и соосность (коаксиальность) часто подразумеваются без явного упоминания) круга радиусом  $r$  ( $0 \leq r \leq a$ ) частично нагруженного основания  $z = 0$ , равная разности значений осевого перемещения  $u_z(r, 0)$  на окружности радиусом  $r$  и в центре  $u_{z1}(0, 0)$ , равна значению осевого перемещения  $u_z(r, 0)$  на окружности радиусом  $r$ :

$$u_z(r, 0) - u_{z1}(0, 0) = u_z(r, 0).$$

А осевое перемещение центра полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2)].$$

Тогда стрела прогиба текущего круга радиусом  $r$  ( $0 \leq r \leq a$ ) полностью нагруженного основания  $z = h$  равна разности значений осевого перемещения  $u_z(r, h)$  на окружности радиусом  $r$  и  $u_{z1}(0, h)$  в центре  $(0, h)$  полностью нагруженного основания  $z = h$ :

$$u_z(r, h) - u_{z1}(0, h) = u_z(r, h) - (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2)].$$

3. Ищется изменение толщины круглой центральной части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части, равное разности значений осевого перемещения  $u_{z1}(a_1, h)$  на окружности радиусом  $a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$  и осевого перемещения  $u_{z1}(a_1, 0)$  на окружности радиусом  $a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ :

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 88/244

$$u_{z1}(a_1, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2} \right];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h \left\{ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2} \right\};$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ 2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2) \right].$$

4. Ищется изменение толщины кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной к кольцевой периферической части, равное разности значений осевого перемещения  $u_{z2}(a_1, h)$  на окружности радиусом  $a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$  и осевого перемещения  $u_{z2}(a_1, 0)$  на окружности радиусом  $a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ :

$$u_{z2}(a_1, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1+\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2} \right];$$

$$u_{z2}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2} \right];$$

$$u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ 2\mu p_1/p - a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1+\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2) \right].$$

5. Ищется вызванный скачком давления на частично нагруженное основание  $z = 0$  скачок изменения, в данном случае уменьшения, толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части:

$$\Delta = [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] - [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] = (p/E)h \left[ - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) \right].$$

6. Этот скачок  $\Delta$  изменения, в данном случае уменьшения, толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части устраняется (полностью возмещается) равными

$$(1/2)|\Delta| = - (1/2)\Delta = (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right]$$

(половине модуля этого скачка  $\Delta$ ) уменьшением толщины круглой центральной части и увеличением толщины кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности сопряжения частей (новое значение каждого из перемещений для отличия от соответствующего старого значения временно снабжается штрихом):

$$[u'_{z1}(a_1, h) - u'_{z1}(a_1, 0)] = [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] - (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right];$$

$$[u'_{z2}(a_1, h) - u'_{z2}(a_1, 0)] = [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] + (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right];$$

$$[u'_{z2}(a_1, h) - u'_{z2}(a_1, 0)] - [u'_{z1}(a_1, h) - u'_{z1}(a_1, 0)] =$$

$$[u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] + (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right] -$$

$$[u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] + (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right] =$$

$$[u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] - [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] + 2(p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right] =$$

$$(p/E)h \left[ - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) \right] + 2(p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right] = 0.$$

7. Для круглой центральной части достаточно отнюдь не единственно возможное удовлетворяющее всем принципам устранения минимизированных невязок сопряжения и условиям, в том числе предыдущих пунктов, указанное добавление к осевому перемещению:

$$u'_{z1}(r, z) = u_{z1}(r, z) + (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1-\mu) - z/h + (1+m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4] r^2/a_1^2}{a_1^2} \right];$$

$$u'_{z1}(0, 0) = u_{z1}(0, 0) = 0;$$

$$u'_{z1}(0, z) = u_{z1}(0, z);$$

$$[u'_{z1}(a_1, h) - u'_{z1}(a_1, 0)] = [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] - (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right].$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 89/244

8. Поскольку формулы (2.45') и (2.46') предусматривают непременно такой выбор произвольной постоянной для кольцевой периферической части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, чтобы уравнивать старые значения

$$u_{z1}(a_1, 0) = u_{z2}(a_1, 0)$$

осевого перемещения цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей на частично нагруженном основании  $z = 0$ , то для уравнивания соответствующих новых значений

$$u'_{z1}(a_1, 0) = u'_{z2}(a_1, 0)$$

необходимо и достаточно такое приращение осевого перемещения кольцевой периферической части, которое на этой же окружности  $(a_1, 0)$  обеспечит точно такое же увеличение нового значения по сравнению со старым, как и для круглой центральной части:

$$\begin{aligned} u'_{z1}(a_1, 0) &= u_{z1}(a_1, 0) + (p/E)h\delta(1/2)(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2); \\ u'_{z2}(a_1, 0) &= u_{z2}(a_1, 0) + (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \delta(1/2)(1 + \mu)a^2/a_1^2. \end{aligned}$$

9. Впридачу к последнему условию вторым условием для приращения осевого перемещения кольцевой периферической части является указанное выше увеличение

$$[u'_{z2}(a_1, h) - u'_{z2}(a_1, 0)] - [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] = (p/E)h[(1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)]$$

толщины кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

10. Для выполнения совокупности последних двух условий достаточно отнюдь не единственно возможное удовлетворяющее всем принципам устранения минимизированных невязок сопряжения указанное добавление к осевому перемещению:

$$\begin{aligned} u'_{z2}(r, z) &= u_{z2}(r, z) + (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ \delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2 \}; \\ u'_{z2}(a_1, 0) &= u_{z2}(a_1, 0) + (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \delta(1/2)(1 + \mu)a^2/a_1^2; \\ u'_{z1}(a_1, 0) &= u'_{z2}(a_1, 0); \end{aligned}$$

$$[u'_{z2}(a_1, h) - u'_{z2}(a_1, 0)] = [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] + (p/E)h[(1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)].$$

11. Итоговыми для двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения являются для удобства ещё раз приводимые здесь следующие две формулы (2.52) и (2.54), причём ввиду отсутствия в явном виде старых значений временные штрихи у новых значений осевого перемещения опускаются:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z1}(r, z)$  составляет (2.52)

$$\begin{aligned} u_{z1}(r, z) &= (p/E)h \{ 2\mu(1/2 + p_1/p)z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 + (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2 \}; \end{aligned}$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z2}(r, z)$  составляет (2.54)

$$\begin{aligned} u_{z2}(r, z) &= (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ \delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2 \}. \end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 90/244

12. Определяется стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right].$$

13. Определяется изменение толщины именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ 2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2) \right].$$

14. Определяется стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right].$$

15. Определяется стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right].$$

16. Определяется стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right].$$

Как и выше, подчёркнутые выражения суть отличия, даваемые общим (полу)степенным методом по сравнению с дающей только не подчёркнутые выражения теорией пластин.

Ввиду особой значимости системы принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность дополнительно создан **однопараметрический** метод устранения именно всех невязок сопряжения, в основной своей части применительно ко всем остальным невязкам сопряжения изложенный выше и отличающийся отказом от изложенного выше двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и устранением невязки осевого перемещения по следующему собственному алгоритму.

1. Исходными для этого однопараметрического метода устранения именно всех невязок сопряжения являются (как и для изложенного выше двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения) применительно к устранению невязки сопряжения именно осевого перемещения следующие две формулы:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z1}(r, z)$  составляет

(2.45')

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \left\{ (\mu + 2\mu p_1/p)z/h + \left[ \frac{(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right] (-z/h + z^2/h^2) - \frac{(1+\mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1+\mu)z^4/h^4 + [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1+\mu)z/h - (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4} \right\};$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z2}(r, z)$  составляет

(2.46')

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1+3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [- (1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1+\mu)z/h + (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 \right\}.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 91/244

Эти две формулы получаются из соответствующих формул (2.45) и (2.46), если в них учесть давление  $p_1$  на боковую поверхность по решению Ламе и выбрать произвольные слагаемые для обеих частей так, чтобы, во-первых, аннулировать осевое перемещение

$$u_{z1}(0, 0) = 0$$

центра частично нагруженного основания  $z = 0$  и, во-вторых, уравнивать значения

$$u_{z1}(a_1, 0) = u_{z2}(a_1, 0)$$

осевого перемещения сопряжения обеих частей на этом основании.

Эти две формулы (2.45') и (2.46') привели к соответствующим формулам (2.52) и (2.54) посредством введения дополнительных слагаемых

$$(2.52): + (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2,$$

$$(2.54): \frac{\delta(1 + \mu)a^2/a_1^2, - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2}{}$$

в фигурных скобках и могут быть получены обратно, если все эти дополнительные слагаемые исключить из соответствующих формул (2.52) и (2.54).

2. Произвольная постоянная осевого перемещения в круглой центральной части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, по-прежнему выбирается нулевой для аннулирования осевого перемещения центра частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(0, 0) = 0.$$

Тогда стрела прогиба текущего концентрического (осевая симметрия и связанные с нею концентричность и соосность (коаксиальность) часто подразумеваются без явного упоминания) круга радиусом  $r$  ( $0 \leq r \leq a$ ) частично нагруженного основания  $z = 0$ , равная разности значений осевого перемещения  $u_z(r, 0)$  на окружности радиусом  $r$  и в центре  $u_{z1}(0, 0)$ , равна значению осевого перемещения  $u_z(r, 0)$  на окружности радиусом  $r$ :

$$u_z(r, 0) - u_{z1}(0, 0) = u_z(r, 0).$$

А осевое перемещение центра полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h[2\mu r_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

Тогда стрела прогиба текущего круга радиусом  $r$  ( $0 \leq r \leq a$ ) полностью нагруженного основания  $z = h$  равна разности значений осевого перемещения  $u_z(r, h)$  на окружности радиусом  $r$  и  $u_{z1}(0, h)$  в центре  $(0, h)$  полностью нагруженного основания  $z = h$ :

$$u_z(r, h) - u_{z1}(0, h) = u_z(r, h) - (p/E)h[2\mu r_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

3. Ищется изменение толщины круглой центральной части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части, равное разности значений осевого перемещения  $u_{z1}(a_1, h)$  на окружности радиусом  $a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$  и осевого перемещения  $u_{z1}(a_1, 0)$  на окружности радиусом  $a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ :

$$u_{z1}(a_1, h) = (p/E)h\left[\frac{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu r_1/p - (1/2)(1 + \mu^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{1}\right];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h\left\{\frac{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{1}\right\};$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[2\mu r_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

4. Ищется изменение толщины кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части, равное разности значений осевого перемещения  $u_{z2}(a_1, h)$  на окружности радиусом  $a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$  и осевого перемещения  $u_{z2}(a_1, 0)$  на окружности радиусом  $a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ :

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 92/244

$$u_{z2}(a_1, h) = (p/E)h[(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1+\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z2}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0) = (p/E)h[2\mu p_1/p - a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1+\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2)].$$

5. Ищется вызванный скачком давления на частично нагруженное основание  $z = 0$  скачок изменения, в данном случае уменьшения, толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части:

$$\Delta = [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] - [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] = (p/E)h[-(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)].$$

6. Поскольку скачок давления наличествует на частично нагруженном основании  $z = 0$  и отсутствует на полностью нагруженном основании  $z = h$ , то скачок  $\Delta$  изменения, в данном случае уменьшения, толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части делится на две части  $\Delta_h$  у полностью нагруженного основания  $z = h$  и  $\Delta_0$  у частично нагруженного основания  $z = 0$  в отношении сумм давлений на оба основания круглой центральной части и кольцевой периферической части соответственно:

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_h;$$

$$\Delta_h/\Delta_0 = (p+0)/(p+p_2) = (p+0)/[p+pa^2/(a^2 - a_1^2)] = 1/[1+a^2/(a^2 - a_1^2)] = (a^2 - a_1^2)/(2a^2 - a_1^2);$$

$$\Delta_h = (a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) \Delta = (a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (p/E)h[-(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)];$$

$$\Delta_0 = (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) \Delta = (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (p/E)h[-(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)].$$

7. Новая произвольная постоянная  $C_2$  осевого перемещения в кольцевой периферической части выбирается единственным образом для обеспечения деления (в указанном отношении) скачка  $\Delta$  уменьшения толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части, то есть для выполнения уравнения

$$C_2 + u_{z2}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, h) = \Delta_h;$$

$$C_2 = u_{z1}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, h) + \Delta_h;$$

$$C_2 = u_{z1}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, h) + (a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (p/E)h[-(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)];$$

$$u_{z1}(a_1, h) = (p/E)h[(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z2}(a_1, h) = (p/E)h[(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1+\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, h) = (p/E)h(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2);$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, h) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2;$$

$$C_2 = (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (p/E)h(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2).$$

8. Формула (2.45') оставляется без изменений, а в формулу (2.46') вносится добавка найденного значения произвольной постоянной  $C_2$ :

$$(2.46'')$$

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2a^2/h^4 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1+3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2z^4/h^4 + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2a^2/h^4 \pm 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 93/244

$$- \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4\}.$$

9. По формуле (2.45') определяется осевое перемещение круглой центральной части на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$u_{z1}(a_1, z) = (p/E)h\{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (\mu + 2\mu p_1/p)z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/4)\mu(1 + 3\mu)a_1^2/h^2](-z/h + z^2/h^2) - (1 + \mu)z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)z^4/h^4\}.$$

10. По формуле (2.46'') определяется осевое перемещение кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$u_{z2}(a_1, z) = (p/E)h\{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + [2\mu p_1/p - \mu a_1^2/(a^2 - a_1^2) - a^2/(a^2 - a_1^2)]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)a_1^2/(a^2 - a_1^2) z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)a_1^2/(a^2 - a_1^2) z^4/h^4\}.$$

11. Определяется невязка осевого перемещения на цилиндрической поверхности  $r = a_1$  сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z) = (p/E)h\{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) z/h + (1 + m)\mu(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) (z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) z^4/h^4\}.$$

В частности, при  $z = 0$

$$u_{z2}(a_1, 0) - u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h\{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)\}.$$

12. Невязка осевого перемещения на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, делится, как и остальные невязки, между его частями поровну:

$$u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z) = [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2 + [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2.$$

13. Поскольку при определении невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из осевого перемещения кольцевой периферической части вычиталось осевое перемещение круглой центральной части на цилиндрической поверхности сопряжения частей, то для аннулирования невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности сопряжения частей необходимо выравнивание осевого перемещения круглой центральной части и осевого перемещения кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности сопряжения частей, для чего в совокупности достаточно, во-первых, к осевому перемещению круглой центральной части прибавить приходящуюся на эту часть половину невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности сопряжения частей, а от осевого перемещения кольцевой периферической части отнять приходящуюся на эту часть половину невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности сопряжения частей, причём получаемые равные между собой значения осевого перемещения круглой центральной части и осевого перемещения кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности сопряжения частей для отличия от предыдущих значений здесь временно снабжаются штрихами:

$$u'_{z1}(a_1, z) = u_{z1}(a_1, z) + [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2;$$

$$u'_{z2}(a_1, z) = u_{z2}(a_1, z) - [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2;$$

$$u'_{z2}(a_1, z) - u'_{z1}(a_1, z) = u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z) - [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2 - [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2 = 0.$$

14. Изменения (прибавленная и вычтенная половины невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей) значений осевого перемещения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, распределяются в радиальном направлении в круглой центральной и кольцевой периферической частях по указанным выше квадратичным законам, обеспечивающим аннулирование этих изменений на оси и на внешней боковой поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$u'_{z1}(r, z) = u_{z1}(r, z) + (1/2)[u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)](r^2/a_1^2);$$

$$u'_{z2}(r, z) = u_{z2}(r, z) - (1/2)[u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)](a - r)^2/(a - a_1)^2.$$

15. Итоговыми для этого однопараметрического метода устранения именно всех невязок сопряжения являются применительно к устранению невязки сопряжения именно осевого перемещения взамен соответствующих формул (2.52) и (2.54) следующие две формулы:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z1}(r, z)$  составляет

$$(2.52')$$

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \left\{ (\underline{\mu} + 2\mu p_1/p)z/h + [(1+m)\underline{\mu}(1+\underline{\mu}) + (3/4)\underline{\mu}(1-\underline{\mu})a_1^2/h^2 + 3\underline{\mu}(1+\underline{\mu})a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - (1+\underline{\mu})^2 z^3/h^3 + (1/2)(1+\underline{\mu})^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1+m)(1-\underline{\mu}^2) + (3/8)(1-\underline{\mu})^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\underline{\mu}^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\underline{\mu}(1+\underline{\mu})z/h - (3/2)\underline{\mu}(1+\underline{\mu})z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1-\underline{\mu}^2)r^4/h^4 + (1/2)[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\underline{\mu}^2)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1+\underline{\mu})a^2/(a^2 - a_1^2) z/h + (1+m)\underline{\mu}(1+\underline{\mu})a^2/(a^2 - a_1^2) (z/h - z^2/h^2) + (1+\underline{\mu})^2 a^2/(a^2 - a_1^2) z^3/h^3 - (1/2)(1+\underline{\mu})^2 a^2/(a^2 - a_1^2) z^4/h^4]r^2/a_1^2 \right\};$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ (1/2)(1+m)(1-\underline{\mu}^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\underline{\mu}^2)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\underline{\mu}^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/16)(1-\underline{\mu}^2)a_1^4/h^4 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1-\underline{\mu}^2)a^2/(a^2 - a_1^2) \right];$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z2}(r, z)$  составляет

$$(2.54')$$

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\underline{\mu}^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1+m)(1-\underline{\mu}^2)a^2/h^2 - (15/16)(1-\underline{\mu}^2)a_1^2 a^2/h^4 - (1+m)(1-\underline{\mu}^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1-\underline{\mu}^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\underline{\mu}(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \underline{\mu} - a^2/a_1^2]z/h + [(1+m)\underline{\mu}(1+\underline{\mu}) + (3/4)\underline{\mu}(1+3\underline{\mu})a^2/h^2 + (3/4)\underline{\mu}(1-\underline{\mu})a_1^2/h^2 - 3\underline{\mu}(1+\underline{\mu})a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1+\underline{\mu})^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\underline{\mu})^2 z^4/h^4 + [(1+m)(1-\underline{\mu}^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\underline{\mu}^2)a_1^2 a^2/h^4 \pm 3\underline{\mu}(1+\underline{\mu})a^2/h^2 z/h - 3\underline{\mu}(1+\underline{\mu})a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\underline{\mu}^2) - (3/8)(1-\underline{\mu}^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\underline{\mu})(3+\underline{\mu})a^2/h^2 + (3/2)(1-\underline{\mu}^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\underline{\mu}(1+\underline{\mu})z/h + (3/2)\underline{\mu}(1+\underline{\mu})z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1-\underline{\mu}^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\underline{\mu}^2)r^4/h^4 - (1/2)a^2/a_1^2 [(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\underline{\mu}^2) - (1+\underline{\mu})z/h + (1+m)\underline{\mu}(1+\underline{\mu})(z/h - z^2/h^2) + (1+\underline{\mu})^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\underline{\mu})^2 z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2 \right\}.$$

16. Определяется стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ (1/2)(1+m)(1-\underline{\mu}^2)a_1^2/h^2 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1-\underline{\mu}^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\underline{\mu})(1-3\underline{\mu})a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\underline{\mu}^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) \right].$$

17. Определяется изменение толщины именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h [2\underline{\mu} p_1/p - (1/2)(1+\underline{\mu}^2)].$$

18. Определяется стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ (1/2)(1+m)(1-\underline{\mu}^2)a_1^2/h^2 - (1/4)(1-\underline{\mu}^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1-\underline{\mu})(1-3\underline{\mu})a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\underline{\mu}^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) \right].$$

19. Определяется стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 95/244

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) \right].$$

20. Определяется стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{1} \right].$$

Как и выше, подчеркнутые выражения суть отличия, даваемые общим (полу)степенным методом по сравнению с дающей только не подчеркнутые выражения теорией пластин.

Этот однопараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения обладает логическими преимуществами перед двухпараметрическим методом устранения минимизированной невязки осевого перемещения: обеспечивает чистоту однородности однопараметрического метода устранения именно всех невязок сопряжения, поскольку и в смешанном параметрическом методе устранения именно всех невязок сопряжения все остальные невязки сопряжения устраняются именно однопараметрическим методом; изъятие дополнительного параметра  $\delta$  соответствует принципу допустимой простоты и снижает степень произвола.

Однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения используют каждый все три метода минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичный, минимаксами их модулей и коллокационный, и благодаря такой многовариантности обеспечивают самопроверяемость и взаимную проверяемость. Она покажет в дальнейшем, что очень хорошо согласующиеся друг с другом и поэтому наиболее надёжные наилучшие итоги достигаются чрезвычайно близкими между собой по итогам однопараметрическим и двухпараметрическим методами устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, а также достаточно близким к ним по итогам однопараметрическим методом устранения невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения. Для этих достаточно близких между собой четырёх итогов даёт существенно отклоняющиеся нижнюю и верхнюю границы двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения соответственно. Этот вывод будет впоследствии подтверждён численной конечно-элементной и экспериментальной проверкой достоверности созданного общего (полу)степенного метода.

А исторически первым из обоих методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения был двухпараметрический метод. Поэтому он именно по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения как точнее и надёжнее использован для построения показанных на рис. 2.12 сплошными линиями эпюр перемещений и напряжений, определённых по формулам (2.52) – (2.55), в характерных сечениях, соответствующих значениям  $z = 0$ ,  $z = h/2$ ,  $z = h$ ,  $r = 0$ ,  $r = a_1$ ,  $r = a$ , для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами

$$h = 60 \text{ мм}, a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}$$

из стекла К8 ( $\mu = 0.2$ ) при давлениях  $p = p_1 = 98 \text{ МПа}$ .

Штриховыми линиями на том же рисунке 2.12 показаны эпюры осевого перемещения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, таких же размеров, но из гипотетического материала с модулем продольной упругости Юнга  $E = 80600 \text{ МПа}$  (таким же, как у стекла К8) и коэффициентом поперечной деформации Пуассона  $\mu = 0.365$  (таким же, как у органического стекла).



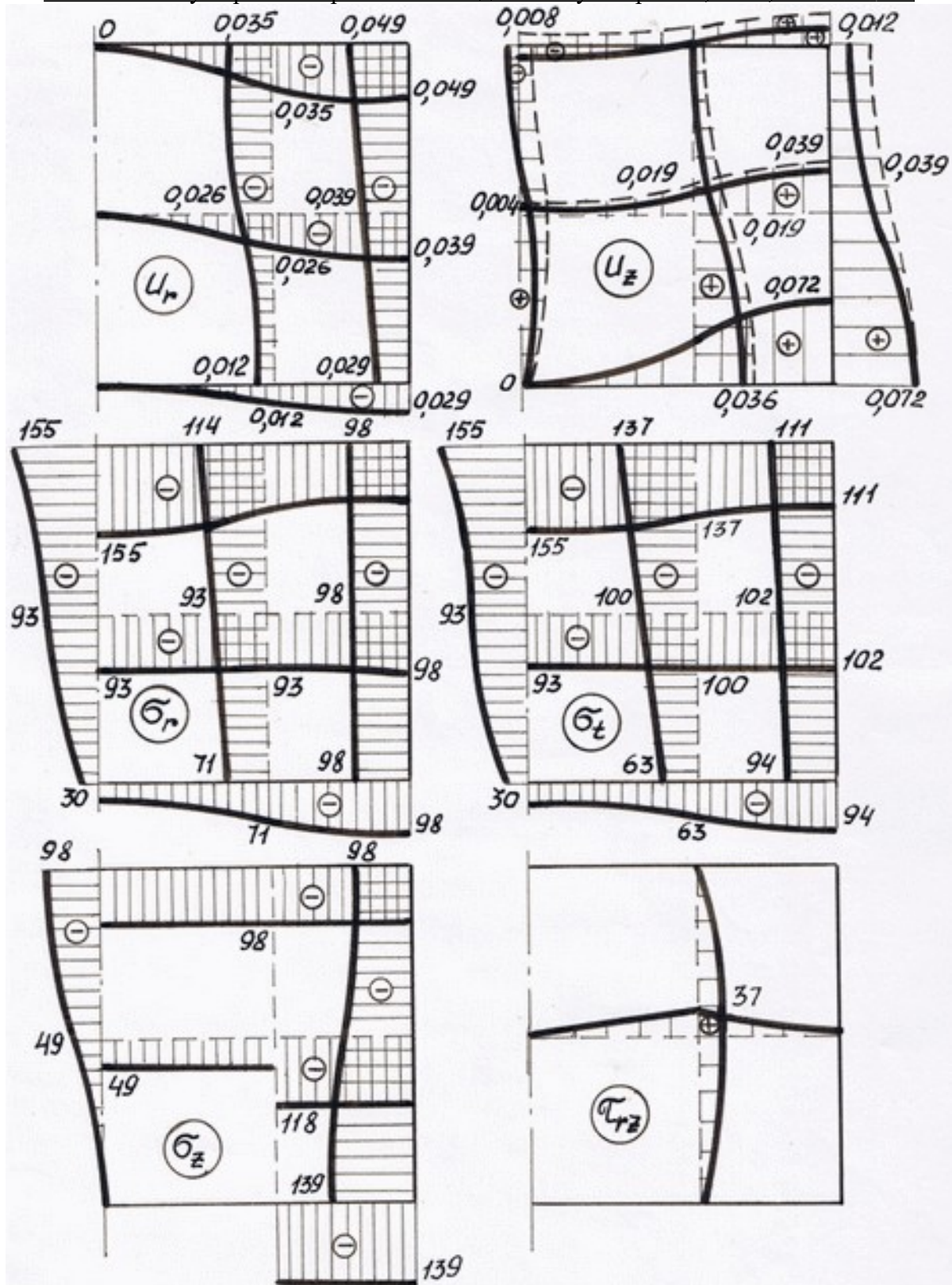


Рисунок 2.12. Эпюры перемещений в миллиметрах и напряжений в мегапаскалях, определённые по формулам (2.52) – (2.55), в сечениях  $z = 0$ ,  $z = h/2$ ,  $z = h$ ,  $r = 0$ ,  $r = a_1$ ,  $r = a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами  $a_1 = 30$  мм,  $a = 55$  мм,  $h = 60$  мм из стекла К8 при давлениях  $p = p_1 = 98$  МПа.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 97/244

Созданный общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию системы принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, причём с коренными отличиями от известных закономерностей напряжённо-деформированных состояний круглых пластин и круглых плит при осесимметричном изгибе равномерными давлениями.

Первые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

Во-первых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от умноженного на минус два давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, в частности к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от нуля при отсутствии давления на боковую поверхность.

Следует заметить, что при отсутствии давления на боковую поверхность теория круглой пластины при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания даёт противоположность и нулевую сумму значений радиального напряжения в центрах оснований. По решению Ламе для сплошного цилиндра под равномерным давлением на боковую поверхность каждое из обоих значений радиального напряжения в центрах оснований противоположно этому давлению, а сумма этих обоих значений радиального напряжения равна умноженному на минус два давлению на боковую поверхность. Эта сумма не меняется от прибавления к ней той нулевой суммы по принципу наложения (суперпозиции). В итоге сумма обоих значений радиального напряжения в центрах оснований круглой пластины при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность при равномерном давлении на боковую поверхность равна умноженному на минус два давлению на боковую поверхность.

Анализ окончательных формул (2.52) – (2.55) для перемещений и напряжений по созданному общему (полу)степенному методу показывает, что новым по сравнению с итогами применения ранее известных аналитических методов является и существенное различие в абсолютных величинах пар равных между собой значений радиального и тангенциального (окружного) напряжений в центрах обоих оснований, то есть между абсолютной величиной пары равных между собой значений

$$\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$$

и абсолютной величиной пары равных между собой значений

$$\sigma_r(0, h) = \sigma_t(0, h),$$

в частном случае при отсутствии давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$p_1 = 0.$$

Именно, ввиду (2.53)

$$\begin{aligned}\sigma_r(0, 0) &= \sigma_r(0, 0), \\ \sigma_r(0, h) &= \sigma_r(0, h), \\ \sigma_r(0, 0) &= p\{-1/2 + [(1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\}; \\ \sigma_r(0, h) &= p\{-1/2 - [(1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + \\ &\quad (3/2)(2+\mu) - (2+\mu)\}; \\ \sigma_r(0, 0) + \sigma_r(0, h) &= p[-1 + (1/2)(2+\mu)] = \mu p/2.\end{aligned}$$

Следовательно, в частном случае при отсутствии давления на боковую поверхность эпюра радиального и тангенциального (окружного) напряжений на оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, не является центрально симметричной относительно его центра на срединной плоскости.

Тем самым в частном случае при отсутствии давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) открыты и обоснованы явление и закон существенного различия абсолютных значений радиального напряжения в центрах оснований и тем самым явление и закон существенного нарушения закона противоположности самих этих значений по теории пластин.

А в общем случае при наличии давления  $p_1$  на боковую поверхность существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) ввиду (2.53)

$$\begin{aligned}\sigma_r(0, 0) &= \sigma_r(0, 0), \\ \sigma_r(0, h) &= \sigma_r(0, h), \\ \sigma_r(0, 0) &= -p_1 - p\{-1/2 + [(1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\}; \\ \sigma_r(0, h) &= -p_1 + p\{-1/2 - [(1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + \\ &\quad (3/2)(2+\mu) - (2+\mu)\}; \\ \sigma_r(0, 0) + \sigma_r(0, h) &= -p_1 - p_1 + p[-1 + (1/2)(2+\mu)] = -2p_1 + \mu p/2\end{aligned}$$

вместо  $(-2p_1)$  по теории пластин. Следовательно, в общем случае при наличии давления  $p_1$  на боковую поверхность открыты и обоснованы принципиально новые явление и закон существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от умноженного на минус два давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность. В частности, при отсутствии давления на боковую поверхность открыты и обоснованы принципиально новые явление и закон существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от нуля, так что эпюра радиального и тангенциального (окружного) напряжений на оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела не является центрально симметричной относительно его центра на срединной плоскости.

Тем самым в общем случае при наличии давления  $p_1$  на боковую поверхность открыты и обоснованы первые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Вторые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 99/244

Во-вторых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона существования взаимности таких критических значений отношения давления на боковую поверхность к внешнему давлению не меньше  $5/8$  и коэффициента поперечной деформации Пуассона, при превышении которых утонение вдоль оси существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали, в частности к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона существования такого критического значения коэффициента поперечной деформации Пуассона, при превышении которого утонение вдоль оси при распространении внешнего давления на боковую поверхность тела сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали.

Исследование деформирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность показывает, что существует такое зависящее только от коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$  критическое значение отношения

$$\Pi = p_1/p$$

давления на боковую поверхность к внешнему давлению, при превышении которого утонение вдоль оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали.

Или, равносильно, существует такое зависящее только от не меньшего  $5/8$  отношения

$$\Pi = p_1/p$$

давления на боковую поверхность к внешнему давлению критическое значение коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$ , при превышении которого утонение вдоль оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали.

Действительно, в общем случае ввиду (2.52) изменение длины осевой нормали именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

$$(2.56)$$

$$u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] > 0 \Leftrightarrow \Pi > (1 + \mu^2)/(4\mu) \Leftrightarrow \Pi \geq 5/8 \wedge \mu > 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2},$$
$$u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] = 0 \Leftrightarrow \Pi = (1 + \mu^2)/(4\mu) \Leftrightarrow \Pi \geq 5/8 \wedge \mu = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2},$$
$$u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] < 0 \Leftrightarrow \Pi < (1 + \mu^2)/(4\mu) \Leftrightarrow \Pi < 5/8 \vee \mu < 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}.$$

В самом деле,  $0 \leq \mu \leq 1/2$  для всех исследованных материалов.

Квадратный трёхчлен  $Q(\mu) = \mu^2 - 4\Pi\mu + 1$  имеет корни  $\mu_1 = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2} \leq \mu_2 = 2\Pi + (4\Pi^2 - 1)^{1/2}$ , действительные при  $\Pi \geq 1/2$ , тогда  $\mu_2 = 2\Pi + (4\Pi^2 - 1)^{1/2} \geq 1 > \mu$ ,

а  $\mu_1 = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2} = 1/2$  при  $\Pi = 5/8$  и  $0 < \mu_1 = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2} < 1/2$  при  $\Pi > 5/8$ . Итог таков.

$Q(\mu) = \mu^2 - 4\Pi\mu + 1 > 0$  при  $\Pi < 5/8$  или при  $\mu < 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}$ . Если  $\Pi \geq 5/8$ , то  $Q(\mu) = \mu^2 - 4\Pi\mu + 1 = 0$  при  $\mu = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}$  и  $Q(\mu) = \mu^2 - 4\Pi\mu + 1 < 0$  при  $\mu > 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}$ .

В численных расчётах для данных эпюр перемещений и напряжений принято условие  $p_1 = p$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 100/244

В частном случае с распространением внешнего давления на боковую поверхность при

$$\Pi = p_1/p = 1$$

из эпюр видно, что именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из неорганического стекла К8, деформируясь, утоняется вдоль продольной оси, а именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из гипотетического материала, отличающегося от стекла К8 свойственным органическому стеклу значительно большим значением коэффициента поперечной деформации Пуассона, деформируясь, утолщается вдоль оси по сравнению с исходным состоянием.

Аналогично последнему деформируется именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из органического стекла.

Поэтому критическим значением коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$  материала сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, является единственный подходящий корень

$$\mu = 2 - 3^{1/2} \approx 0.268$$

квадратного уравнения

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) = 1, \\ \mu^2 - 4\mu + 1 = 0.$$

Другой корень этого уравнения

$$\mu = 2 + 3^{1/2} \approx 3.732$$

намного превышает известные значения коэффициента поперечной деформации Пуассона для исследованных материалов.

Следовательно, для исследованных материалов

$$(2.57)$$

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) > 1 \text{ при } \mu < 2 - 3^{1/2} \approx 0.268,$$

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) = 1 \text{ при } \mu = 2 - 3^{1/2} \approx 0.268,$$

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) < 1 \text{ при } \mu > 2 - 3^{1/2} \approx 0.268.$$

Для стекла К8 с коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu \approx 0.209 < 2 - 3^{1/2} \approx 0.268$$

имеет место первое из трёх условий (2.57), поэтому

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) > 1$$

и при

$$\Pi = p_1/p = 1$$

имеет место последнее из трёх условий (2.56), поэтому

$$u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] < 0,$$

так что при

$$p_1 = p$$

именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из стекла К8 в центре утоняется.

Для органического стекла с коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu \approx 0.365 > 2 - 3^{1/2} \approx 0.268$$

имеет место последнее из трёх условий (2.57), так что

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) < 1$$

и при

$$\Pi = p_1/p = 1$$

имеет место первое из трёх условий (2.56), поэтому

$$u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] > 0,$$

так что при

$$p_1 = p$$

именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из органического стекла в центре утолщается.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 101/244

Следовательно, открыты и обоснованы принципиально новые явление и закон существования взаимности таких критических значений отношения давления на боковую поверхность к внешнему давлению не меньше  $5/8$  и коэффициента поперечной деформации Пуассона, при превышении которых утонение вдоль оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали, в частности при распространении внешнего давления на боковую поверхность открыты и обоснованы принципиально новые явление и закон существования такого критического значения коэффициента поперечной деформации Пуассона, при превышении которого утонение вдоль оси сменяется утолщением вдоль оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела путём перехода через инвариантность длины осевой нормали.

Тем самым открыты и обоснованы вторые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Третьи явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

В-третьих, и это самое главное, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона кратного превышения стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, так как центральная часть частично нагруженного основания не нагружена, а противодействие прикладывается лишь по периферической его части, причём при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями эта кратность составляет примерно три-четыре.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность даёт строго одинаковые стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей соответственно.

Двухпараметрический и однопараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность позволяют доказать, что при любом положительном радиусе текущая стрела прогиба

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 102/244

частично нагруженного основания строго больше, чем текущая стрела прогиба полностью нагруженного основания.

**Двухпараметрический** метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения эти трети явление и закон напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность подтверждает итогами расчётов по формуле (2.52) для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и по формуле (2.54) для осевого перемещения в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

По формуле (2.52) для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \{ 2\mu(1/2 + p_1/p)z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - (1+\mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1+\mu)z/h - (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1-\mu) - z/h + (1+m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2 \}$$
 осевое перемещение и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h \{ [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 \};$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) = (p/E)h \{ 2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2) + [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 - (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 \};$$

осевое перемещение центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ , равное утолщению (при положительности) и утонению (при отрицательности) сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси,

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h [2\mu(1/2 + p_1/p) - (1/2)(1+\mu^2)] = (p/E)h [2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2)];$$

текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \{ [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 - (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 \};$$

непрерывно строго положительная при положительном радиусе  $r$  разность текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  и текущей стрелы прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) - [u_{z1}(r, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2;$$

стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h [(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h [(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

строго положительная разность стрелы прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$  и стрелы прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, 0) - [u_z(a_1, h) - u_z(0, h)] = (p/E)h(1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2).$$

По формуле (2.54) для осевого перемещения в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,  $u_{z2}(r, z) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ \delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)^2z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1^2) \}$ ;

осевое перемещение и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, 0) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ \delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 - \delta(1/2)(1 + m)a^2/a_1^2 (a - r)^2/(a - a_1^2) + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4] \ln(r/h) + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 \}$$
;

осевое перемещение края и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  стрела прогиба всего (на участке от нуля до  $a$ ) частично нагруженного основания  $z = 0$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, h) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ \delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) + 2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + \mu^2) + (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(r/h) - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(r/h) + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - (1/2)](a - r)^2/(a - a_1^2) \}$$
;

найденное выше осевое перемещение центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ , дающее при положительности утолщение и при отрицательности утонение сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси,

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h[2\mu(1/2 + p_1/p) - (1/2)(1 + \mu)^2] = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)];$$

текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ \delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(r/h) - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(r/h) + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - (1/2)](a - r)^2/(a - a_1^2) \}$$
;

разность текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  и текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, 0) - [u_{z2}(r, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h(1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [2 - (a - r)^2/(a - a_1^2)] > 0,$$

причём строгая положительность последнего множителя в квадратных скобках, подчеркнутого как отсутствующего и при этом заменяемого нулём в теории пластин, обусловлена совокупностью двойных неравенств

$$0 < a_1 < a,$$

$$a_1 \leq r \leq a$$

в рассматриваемой кольцевой периферической части, откуда следуют неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leq a - r \leq a - a_1, \\ (a - r)^2 \leq (a - a_1)^2, \\ (a - r)^2 / (a - a_1)^2 \leq 1; \end{aligned}$$

стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2)}{3\mu a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} + (3/16)(1-\mu)(7 + \right.$$

стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h, 0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2)}{\mu^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} - (1/2)(1 - \right.$$

строго положительная разность стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$  и стрелы прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h, 0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) - [u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1}.$$

Тем самым **двухпараметрическим** методом устранения минимизированной невязки осевого перемещения доказано, что по теории пластин оба основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, искривляются одинаково, а по общему (полу)степенному методу при любом положительном радиусе текущая стрела прогиба частично нагруженного основания строго больше, чем текущая стрела прогиба полностью нагруженного основания.

**Однопараметрический** метод минимизации невязки осевого перемещения эти третьи явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность подтверждает итогами расчётов по формуле (2.52') для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и по формуле (2.54') для осевого перемещения в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

По формуле (2.52') для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \left\{ \frac{\mu + 2\mu p_1/p}{z/h} + \frac{[(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - (1+\mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1+\mu)z/h - (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + (1/2)[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) z/h + (1+m)\mu(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) (z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 a^2/(a^2 - a_1^2) z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 a^2/(a^2 - a_1^2) z^4/h^4]r^2/a_1^2} \right\}$$

осевое перемещение и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h \left\{ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2} \right\};$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) = (p/E)h \left\{ 2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2) + \frac{[(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + [(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)]r^2/a_1^2} \right\};$$

осевое перемещение центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ , дающее при положительности утолщение и при отрицательности утонение именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси,

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h [2\mu(1/2 + p_1/p) - (1/2)(1+\mu^2)] = (p/E)h [2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2)];$$

текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 105/244

$$u_{z1}(r, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left\{ \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{h^2} + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \right] r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2) r^4/h^4 + \left[ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)} - \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right] r^2/a_1^2 \right\};$$

непрерывно строго положительная при положительном радиусе  $r$  разность текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  и текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) - [u_z(r, h) - u_z(0, h)] = (p/E)h \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{r^2/a_1^2};$$

стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)} + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) \right];$$

стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 - (1/4)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)}{3\mu a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2)} + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) \right];$$

строго положительная разность стрелы прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$  и стрелы прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, 0) - [u_z(a_1, h) - u_z(0, h)] = (p/E)h \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{r^2/a_1^2}.$$

По формуле (2.54') для осевого перемещения в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2} + \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1+3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1+\mu)z/h + (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 - (1/2)a^2/a_1^2 \left[ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/2)(1-\mu^2)} - \frac{(1+\mu)z/h + (1+m)\mu(1+\mu)(z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4}{(a-r)^2/(a-a_1)^2} \right] \right\};$$

осевое перемещение и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, 0) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2} + \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)] r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 - \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/4)(1-\mu^2)a^2/a_1^2} (a-r)^2/(a-a_1)^2 \right\};$$

осевое перемещение края и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  стрела прогиба всего (на участке от нуля до  $a$ ) частично нагруженного основания  $z = 0$  при  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{a_1^2} + \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{(3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right];$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, h) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2} + \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + 2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - a^2/a_1^2 + (1/2)(1+\mu^2) + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)] r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 - \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/4)(1-\mu^2)a^2/a_1^2} - \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/a_1^2}{(a-r)^2/(a-a_1)^2} \right\};$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 106/244

найденное выше осевое перемещение центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ , дающее при положительности утолщение и при отрицательности утонение сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси,

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h[2\mu(1/2 + \rho_1/p) - (1/2)(1 + \mu^2)] = (p/E)h[2\mu\rho_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)];$$

текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + \mu^2) + [(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4] \ln(r/h) + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - [(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 - (1/4)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2](a - r)^2/(a - a_1)^2 \};$$

разность текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  и текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, 0) - [u_{z2}(r, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h(1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [2 - (a - r)^2/(a - a_1)^2] > 0,$$

причём строгая положительность последнего множителя в квадратных скобках, подчеркнутого как отсутствующего и при этом заменяемого нулём в теории пластин, обусловлена совокупностью двойных неравенств

$$0 < a_1 < a, \\ a_1 \leq r \leq a$$

в рассматриваемой кольцевой периферической части, откуда следуют неравенства

$$0 \leq a - r \leq a - a_1, \\ (a - r)^2 \leq (a - a_1)^2, \\ (a - r)^2/(a - a_1)^2 \leq 1;$$

стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

строго положительная разность стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$  и стрелы прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) - [u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2).$$

Тем самым **однопараметрическим** методом устранения невязки осевого перемещения доказано, что по теории пластин оба основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, искривляются одинаково, а по общему (полу)степенному методу при любом положительном радиусе текущая стрела прогиба частично нагруженного основания строго больше, чем текущая стрела прогиба полностью нагруженного основания.

Причина такого различия заключается в том, что полностью нагруженное основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагружено именно равномерно, а частично нагруженное основание имеет свободную от давления центральную часть и нагруженную именно повышенным равномерным давлением периферическую часть. Подобна такому различию искривлений оснований выпуклость в сторону плоского кольцевого штампа первоначально плоской поверхности на свободном от давления круглом участке внутри штампа.

Чтобы показать весьма значительно превышающую единицу и обычно составляющую примерно три-четыре кратность превышения стрелы прогиба круглой центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелой прогиба круглой центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно именно существенно трёхмерного

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 107/244

сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, используются численные расчёты по однопараметрическому методу устранения невязки осевого перемещения с формулами (2.52') и (2.54') и итогами и параллельно вслед в двойных кавычках «» для удобства сопоставления по двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения с формулами (2.52) и (2.54) и итогами.

В численных расчётах приняты размеры

$$a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}, h = 60 \text{ мм}$$

и соответствующие соотношения размеров

$$h = 2a_1, a = (11/6)a_1$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

или из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

при внешнем и боковом давлениях соответственно

$$p = p_1 = 98 \text{ МПа},$$

значение параметра  $m$  согласно (2.36) и значение параметра  $\delta$  согласно (2.50).

Ввиду принципиальной новизны третьих открытий явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность и вследствие необходимости непременно доказательной силы предстоящих расчётов созданным общим (полу)степенным методом ключевые избранные из расчётов приводятся полностью как показ ясных, простых и мощных общности, применимости, воспроизводимости и проверяемости. Такие взаимосвязанные необходимые для именно глубокого понимания ясность, прозрачность, простота и убедительность немислимы для численных и экспериментальных методов, у которых есть свои важные преимущества и которые необходимо использовать для независимой проверки итогов приложения любых аналитических методов, в том числе созданного общего (полу)степенного метода.

Избраны изменение толщины вдоль оси (при его положительности или отрицательности утолщение или утонение соответственно) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания с распространением давления на полностью нагруженное основание также на боковую поверхность, а для оценки именно кратности превышения искривления полностью нагруженного основания искривлением частично нагруженного основания соотношение стрел прогиба центральных частей и целиком обоих оснований. В случаях сокращений размерностей используются в данном случае простые и удобные отношения давлений и размеров именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Одинаковое по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) изменение толщины вдоль оси (при его положительности или отрицательности утолщение или утонение соответственно) именно существенно трёхмерного

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 108/244

сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания с распространением давления на полностью нагруженное основание также на боковую поверхность ( $p_1 = p$ ), равное осевому перемещению центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ ,

$$u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)];$$

$$u_z(0, h) = (1/2)(4\mu - 1 - \mu^2)(p/E)h;$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

составляет

$$u_z(0, h) = (1/2)(4*0.209 - 1 - 0.209^2)(98/80600)60 \text{ мм} = - 0.007576 \text{ мм}$$

и является утонением;

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

составляет

$$u_z(0, h) = (1/2)(4*0.365 - 1 - 0.365^2)(98/3030)60 \text{ мм} = 0.3171 \text{ мм}$$

и является утолщением.

Стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/8)(1 + m)(1 - \mu^2) + (12463/49470)(1 - \mu^2) + (3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

$$\ll u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/8)(1 + m)(1 - \mu^2) + \delta(121/170)(1 + \mu) + (3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)]\gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$  по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/80600)*[(1/8)*(1 + 1/5)(1 - 0.209^2) + (12463/49470)*(1 - 0.209^2) + (3/256)*(1 - 0.209)(1 - 3*0.209) + (363/2720)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.03394 \text{ мм};$$

$$\ll u_{z1}(a_1, 0) = 98/80600*[(1/8)*(1 + 1/5)*(1 - 0.209^2) + 0.277*121/170*(1 + 0.209) + 3/256*(1 - 0.209)*(1 - 3*0.209) + 363/2720*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.03375 \text{ мм}\gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/80600) * [(1/8) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (12463/49470) * (1 - 0.209^2) + (3/256) * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + (363/2720) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.03328 \text{ мм};$$

$$\llcorner u_{z1}(a_1, 0) = 98/80600 * [1/8 * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + 0.198 * 121/170 * (1 + 0.209) + 3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.02814 \text{ мм} \llcorner;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.209) = 0.334$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/80600) * [(1/8) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (12463/49470) * (1 - 0.209^2) + (3/256) * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + (363/2720) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.03219 \text{ мм};$$

$$\llcorner u_{z1}(a_1, 0) = 98/80600 * [1/8 * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + 0.334 * 121/170 * (1 + 0.209) + 3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.03558 \text{ мм} \llcorner;$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/3030) * [(1/8) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (12463/49470) * (1 - 0.365^2) + (3/256) * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + (363/2720) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.8108 \text{ мм};$$

$$\llcorner u_{z1}(a_1, 0) = 98/3030 * [1/8 * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + 0.222 * 121/170 * (1 + 0.365) + 3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.8056 \text{ мм} \llcorner;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/3030) * [(1/8) * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (12463/49470) * (1 - 0.365^2) + (3/256) * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + (363/2720) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.7950 \text{ мм};$$

$$\llcorner u_{z1}(a_1, 0) = 98/3030 * [1/8 * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + 0.159 * 121/170 * (1 + 0.365) + 3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.6710 \text{ мм} \llcorner;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.365) = 0.281$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/3030) * [(1/8) * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (12463/49470) * (1 - 0.365^2) + (3/256) * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + (363/2720) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.7687 \text{ мм};$$

$$\llcorner u_{z1}(a_1, 0) = 98/3030 * [1/8 * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + 0.281 * 121/170 * (1 + 0.365) + 3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.8747 \text{ мм} \llcorner;$$

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) все шесть вариантов (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) сводятся воедино к обобщаемой и существенно уточняемой ими теории круглой пластины для именно

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 110/244

существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, все подчёркнутые выражения аннулируются, стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = 98/80600 * [3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.005896 \text{ мм};$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = 98/3030 * [3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.1347 \text{ мм}.$$

Стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 - (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/8)(1 + m)(1 - \mu^2) - (121/1164)(1 - \mu^2) + (3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

$$\ll u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/8)(1 + m)(1 - \mu^2) + \delta(121/170)(1 + \mu) - (121/340)(1 - \mu^2) + (3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)]\gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * [(1/8) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) - (121/1164) * (1 - 0.209^2) + (3/256) * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + (363/2720) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.009108 \text{ мм},$$

$$\ll u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [1/8 * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + 0.277 * 121/170 * (1 + 0.209) - 121/340 * (1 - 0.209^2) + 3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.008922 \text{ мм}\gg,$$

что в 3.726 «3.706» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03394 \text{ мм} \ll 0.03375 \text{ мм}\gg$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 111/244

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600)*[(1/8)*(1 + 1/8)(1 - 0.209^2) - (121/1164)(1 - 0.209^2) + (3/256)*(1 - 0.209)*(1 - 3*0.209) + (363/2720)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.008454 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600*[(1/8)*(1 + 1/8)*(1 - 0.209^2) + 0.198*121/170*(1 + 0.209) - 121/340*(1 - 0.209^2) + 3/256*(1 - 0.209)*(1 - 3*0.209) + 363/2720*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.003308 \text{ мм} \rangle,$$

что в 3.937 «8.507» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03328 \text{ мм} \langle 0.02814 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ;

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.209) = 0.334$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600)*[(1/8)*(1 + 0)(1 - 0.209^2) - (121/1164)(1 - 0.209^2) + (3/256)*(1 - 0.209)*(1 - 3*0.209) + (363/2720)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.007364 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600*[(1/8)*(1 + 0)*(1 - 0.209^2) + 0.334*121/170*(1 + 0.209) - 121/340*(1 - 0.209^2) + 3/256*(1 - 0.209)*(1 - 3*0.209) + 363/2720*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.01076 \text{ мм} \rangle,$$

что в 4.371 «3.307» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03219 \text{ мм} \langle 0.03558 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ .

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030)*[(1/8)*(1 + 1/5)(1 - 0.365^2) - (121/1164)(1 - 0.365^2) + (3/256)*(1 - 0.365)*(1 - 3*0.365) + (363/2720)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.2121 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030*[(1/8)*(1 + 1/5)*(1 - 0.365^2) + 0.222*121/170*(1 + 0.365) - 121/340*(1 - 0.365^2) + 3/256*(1 - 0.365)*(1 - 3*0.365) + 363/2720*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.2069 \text{ мм} \rangle,$$

что в 3.823 «3.894» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z1}(a_1, 0) = 0.8108 \text{ мм} \langle 0.8056 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ;

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030)*[(1/8)*(1 + 1/8)(1 - 0.365^2) - (121/1164)(1 - 0.365^2) + (3/256)*(1 - 0.365)*(1 - 3*0.365) + (363/2720)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.1964 \text{ мм},$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 112/244

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [1/8 * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + 0.159 * 121/170 * (1 + 0.365) - 121/340 * (1 - 0.365^2)] + 3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) \rangle * 60 \text{ мм} = 0.07240 \text{ мм} \rangle,$$

что в 4.048 «9.268» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.7950 \text{ мм} \langle 0.6710 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.365) = 0.281$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030) * [(1/8) * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) - (121/1164) * (1 - 0.365^2) + (3/256) * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + (363/2720) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.1701 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [1/8 * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + 0.281 * 121/170 * (1 + 0.365) - 121/340 * (1 - 0.365^2)] + 3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) \rangle * 60 \text{ мм} = 0.2761 \text{ мм} \rangle,$$

что в 4.519 «3.168» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.7687 \text{ мм} \langle 0.8747 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ . В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) все шесть вариантов (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) сводятся воедино к обобщаемой и существенно уточняемой ими теории круглой пластины для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, все подчеркнутые выражения аннулируются, стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.005896 \text{ мм};$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.1347 \text{ мм}.$$

Стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(12463/24735)(1 - \mu^2) + (121/340)(1 + m)(1 - \mu^2)\ln(11/6) + (121/3072)(1 - \mu)(7 + 3\mu) - (363/5440)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

$$\langle u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]; \rangle$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 113/244

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(121/340)(1 + m)(1 - \mu^2)\ln(11/6) + \delta(1 + \mu)(121/85) + (121/3072)(1 - \mu)(7 + 3\mu) - (363/5440)(1 - \mu^2)\ln(11/6)]\rangle.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277$$

составляет

$$u_{z2}(a, 0) = (98/80600)*[(12463/24735)*(1 - 0.209^2) + (121/340)*(1 + 1/5)(1 - 0.209^2)*\ln(11/6) + (121/3072)*(1 - 0.209)(7 + 3*0.209) - (363/5440)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.06773 \text{ мм},$$
$$\langle u_{z2}(a, 0) = 98/80600*[(121/340)*(1 + 1/5)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6) + 0.277*(1 + 0.209)*121/85 + 121/3072*(1 - 0.209)*(7 + 3*0.209) - 363/5440*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.06735 \text{ мм} \rangle,$$

что в 1.996 «1.996» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03394 \text{ мм} \langle 0.03375 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

составляет

$$u_{z2}(a, 0) = (98/80600)*[(12463/24735)*(1 - 0.209^2) + (121/340)*(1 + 1/8)(1 - 0.209^2)*\ln(11/6) + (121/3072)*(1 - 0.209)(7 + 3*0.209) - (363/5440)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.06660 \text{ мм},$$
$$\langle u_{z2}(a, 0) = 98/80600*[(121/340)*(1 + 1/8)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6) + 0.198*(1 + 0.209)*121/85 + 121/3072*(1 - 0.209)*(7 + 3*0.209) - 363/5440*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.05630 \text{ мм} \rangle,$$

что в 2.001 «2.001» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03328 \text{ мм} \langle 0.02814 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.209) = 0.334$$

составляет

$$u_{z2}(a, 0) = (98/80600)*[(12463/24735)*(1 - 0.209^2) + (121/340)*(1 + 0)(1 - 0.209^2)*\ln(11/6) + (121/3072)*(1 - 0.209)(7 + 3*0.209) - (363/5440)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.06472 \text{ мм},$$
$$\langle u_{z2}(a, 0) = 98/80600*[(121/340)*(1 + 0)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6) + 0.334*(1 + 0.209)*121/85 + 121/3072*(1 - 0.209)*(7 + 3*0.209) - 363/5440*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.07150 \text{ мм} \rangle,$$

что в 2.011 «2.010» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03219 \text{ мм} \langle 0.03558 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ . Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

составляет

$$u_{z2}(a, 0) = (98/3030)*[(12463/24735)*(1 - 0.365^2) + (121/340)*(1 + 1/5)(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + (121/3072)*(1 - 0.365)(7 + 3*0.365) - (363/5440)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.6078 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, 0) = 98/3030*[121/340*(1 + 1/5)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + 0.222*(1 + 0.365)*121/85 + 121/3072*(1 - 0.365)*(7 + 3*0.365) - 363/5440*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.5974 \text{ мм} \rangle,$$

что в 1.983 «1.983» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.8108 \text{ мм} \langle 0.8056 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

составляет

$$u_{z2}(a, 0) = (98/3030)*[(12463/24735)*(1 - 0.365^2) + (121/340)*(1 + 1/8)(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + (121/3072)*(1 - 0.365)(7 + 3*0.365) - (363/5440)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.5806 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, 0) = 98/3030*[121/340*(1 + 1/8)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + 0.159*(1 + 0.365)*121/85 + 121/3072*(1 - 0.365)*(7 + 3*0.365) - 363/5440*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.3326 \text{ мм} \rangle,$$

что в 1.988 «1.986» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.7950 \text{ мм} \langle 0.6710 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.365) = 0.281$$

составляет

$$u_{z2}(a, 0) = (98/3030)*[(12463/24735)*(1 - 0.365^2) + (121/340)*(1 + 0)(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + (121/3072)*(1 - 0.365)(7 + 3*0.365) - (363/5440)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.5352 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, 0) = 98/3030*[121/340*(1 + 0)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + 0.281*(1 + 0.365)*121/85 + 121/3072*(1 - 0.365)*(7 + 3*0.365) - 363/5440*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.7473 \text{ мм} \rangle,$$

что в 1.997 «1.998» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.7687 \text{ мм} \langle 0.8747 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ .

Стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(121/340)(1 + m)(1 - \mu^2)\ln(11/6) - (121/582)(1 - \mu^2) + (121/3072)(1 - \mu)(7 + 3\mu) - (363/5440)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

$$\langle u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(121/340)(1 + m)(1 - \mu^2)\ln(11/6) + \delta(1 + \mu)(121/85) - (121/170)(1 - \mu^2) + (121/3072)(1 - \mu)(7 + 3\mu) - (363/5440)(1 - \mu^2)\ln(11/6)] \rangle.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277$$

составляет

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 115/244

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * [(121/340) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.209^2)] + (121/3072) * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - (363/5440) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) * 60 \text{ мм} = 0.01807 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [121/340 * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) + 0.277 * (1 + 0.209) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.209^2)] + 121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) * 60 \text{ мм} = 0.01769 \text{ мм} \rangle,$$

что в 3.748 «3.807» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 0.06773 \text{ мм} \langle 0.06735 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ ;

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * [(121/340) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.209^2)] + (121/3072) * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - (363/5440) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) * 60 \text{ мм} = 0.01694 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [121/340 * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) + 0.198 * (1 + 0.209) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.209^2)] + 121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) * 60 \text{ мм} = 0.006647 \text{ мм} \rangle,$$

что в 3.932 «8.470» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 0.06660 \text{ мм} \langle 0.05630 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ ;

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.209) = 0.334$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * [(121/340) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.209^2)] + (121/3072) * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - (363/5440) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) * 60 \text{ мм} = 0.01506 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [121/340 * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) + 0.334 * (1 + 0.209) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.209^2)] + 121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) * 60 \text{ мм} = 0.02184 \text{ мм} \rangle,$$

что в 4.297 «3.274» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 0.06472 \text{ мм} \langle 0.07150 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ .

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h, 0 \leq r \leq a$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030) * [(121/340) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.365^2)] + (121/3072) * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - (363/5440) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) * 60 \text{ мм} = 0.4106 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [121/340 * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) + 0.222 * (1 + 0.365) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.365^2)] + 121/3072 * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - 363/5440 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) * 60 \text{ мм} = 0.4002 \text{ мм} \rangle,$$

что в 3.916 «3.992» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 1.6078 \text{ мм} \ll 1.5974 \text{ мм} \gg$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ ; по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030) * [(121/340) * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.365^2)] + (121/3072) * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - (363/5440) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.3834 \text{ мм},$$
$$\ll u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [121/340 * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) + 0.159 * (1 + 0.365) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.365^2) + 121/3072 * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - 363/5440 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.1354 \text{ мм} \gg,$$

что в 4.123 «9.842» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 1.5806 \text{ мм} \ll 1.3326 \text{ мм} \gg$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ ; по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.365) = 0.281$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030) * [(121/340) * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.365^2)] + (121/3072) * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - (363/5440) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.3380 \text{ мм},$$
$$\ll u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [121/340 * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) + 0.281 * (1 + 0.365) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.365^2) + 121/3072 * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - 363/5440 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.5501 \text{ мм} \gg,$$

что в 4.542 «3.176» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 1.5352 \text{ мм} \ll 1.7473 \text{ мм} \gg$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ .

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) все шесть вариантов (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) сводятся воедино к обобщаемой и существенно уточняемой ими теории круглой пластины для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, все подчеркнутые выражения аннулируются, стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h, 0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2 / h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 h^4 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(121/3072)(1 - \mu)(7 + 3\mu) - (363/5440)(1 - \mu^2) \ln(11/6)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.01451 \text{ мм};$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 117/244

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [121/3072 * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - 363/5440 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.3249 \text{ мм.}$$

Совокупность итогов вычислений значений стрел прогиба  $u_z(a_1, 0)$  круглой центральной части

$$0 \leq r \leq a_1$$

и  $u_z(a, 0)$  всего частично нагруженного основания

$$z = 0,$$

стрел прогиба

$$\Delta_z(a_1, h) = u_z(a_1, h) - u_z(0, h)$$

круглой центральной части

$$0 \leq r \leq a_1$$

и

$$\Delta_z(a, h) = u_z(a, h) - u_z(0, h)$$

всего полностью нагруженного основания

$$z = h$$

в микрометрах (мкм) и их отношений  $u_z(a_1, 0)/\Delta_z(a_1, h)$  и  $u_z(a, 0)/\Delta_z(a, h)$  соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность сведена для наглядности в таблицу 2.5.

Таблица 2.5. Стрелы прогиба  $u_z(a_1, 0)$  круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и  $u_z(a, 0)$  всего частично нагруженного основания  $z = 0$ , стрелы прогиба  $\Delta_z(a_1, h) = u_z(a_1, h) - u_z(0, h)$  круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и  $\Delta_z(a, h) = u_z(a, h) - u_z(0, h)$  всего полностью нагруженного основания  $z = h$  в микрометрах (мкм) и их отношений  $u_z(a_1, 0)/\Delta_z(a_1, h)$  и  $u_z(a, 0)/\Delta_z(a, h)$  соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла или из органического стекла, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность по теории пластин ( $h \ll a_1$ ) и по общему (полу)степенному методу при использовании двухпараметрического (m,  $\delta$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и однопараметрического (m) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

| Метод расчёта     | Стрелы прогиба (мкм) оснований тела, их центральных частей, отношения |                    |                                |             |                  |                            |                                 |                    |                                |             |                  |                            |
|-------------------|---|--------------------|--------------------------------|-------------|------------------|----------------------------|---------------------------------|--------------------|--------------------------------|-------------|------------------|----------------------------|
|                   | Цилиндр из неорганического стекла                                     |                    |                                |             |                  |                            | Цилиндр из органического стекла |                    |                                |             |                  |                            |
|                   | $u_z(a_1, 0)$   | $\Delta_z(a_1, h)$ | $u_z(a_1, 0)/\Delta_z(a_1, h)$ | $u_z(a, 0)$ | $\Delta_z(a, h)$ | $u_z(a, 0)/\Delta_z(a, h)$ | $u_z(a_1, 0)$                   | $\Delta_z(a_1, h)$ | $u_z(a_1, 0)/\Delta_z(a_1, h)$ | $u_z(a, 0)$ | $\Delta_z(a, h)$ | $u_z(a, 0)/\Delta_z(a, h)$ |
| ( $h \ll a_1$ )   | 5.896   | 5.896              | 1                              | 14.51       | 14.51            | 1                          | 134.7                           | 134.7              | 1                              | 324.9       | 324.9            | 1                          |
| (m, $\delta$ ), 1 | 33.75   | 8.922              | 3.706                          | 67.35       | 17.69            | 3.807                      | 805.6                           | 206.9              | 3.894                          | 1597.4      | 400.2            | 3.992                      |
| (m, $\delta$ ), 2 | 28.14   | 3.308              | 8.507                          | 56.30       | 6.647            | 8.470                      | 671.0                           | 72.40              | 9.268                          | 1332.6      | 135.4            | 9.842                      |
| (m, $\delta$ ), 3 | 35.58   | 10.76              | 3.307                          | 71.50       | 21.84            | 3.274                      | 874.7                           | 276.1              | 3.168                          | 1747.3      | 550.1            | 3.176                      |
| (m), 1            | 33.94   | 9.108              | 3.726                          | 67.73       | 18.07            | 3.748                      | 810.8                           | 212.1              | 3.823                          | 1607.8      | 410.6            | 3.916                      |
| (m), 2            | 33.28   | 8.454              | 3.937                          | 66.60       | 16.94            | 3.932                      | 795.0                           | 196.4              | 4.048                          | 1580.6      | 383.4            | 4.123                      |
| (m), 3            | 32.19   | 7.364              | 4.371                          | 64.72       | 15.06            | 4.297                      | 768.7                           | 170.1              | 4.519                          | 1535.2      | 338.0            | 4.542                      |

Тем самым открыты и обоснованы третьи явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Кроме того, выявлено и подтверждено следующее:

1. Однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения используют каждый все три метода минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичный, минимаксами их модулей и коллокационный, и благодаря такой многовариантности обеспечивают самопроверяемость и взаимную проверяемость.

2. Очень хорошо согласующиеся друг с другом и поэтому наиболее надёжные наилучшие итоги достигаются чрезвычайно близкими между собой по итогам однопараметрическим и двухпараметрическим методами устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, а также достаточно близким к ним по итогам с приемлемыми их занижениями однопараметрическим методом устранения невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения.

3. Для этих достаточно близких между собой четырёх итогов по стрелам прогиба даёт нижнюю и верхнюю границы двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения соответственно, а также непомерно завышенную и существенно заниженную кратности превышения стрел прогиба полностью нагруженного основания и его центральной части стрелами прогиба частично нагруженного основания и его центральной части.

4. Кратность превышения стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями составляет примерно три-четыре.

5. Теория круглой пластины занижает стрелы прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента примерно в пять-шесть раз.

Ввиду приближённости устранения минимизированных невязок сопряжения решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность требуется проверка достоверности общего (полу)степенного метода и результатов его применения.

## 2.11. Выводы по главе 2

1. В рациональной конструкции оптического иллюминатора для высоких давлений именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент с плоскопараллельными оптическими поверхностями, нагружено равномерными давлением по боковой поверхности цилиндра и взаимно уравнивающими друг друга давлением по всей внешней оптической поверхности и повышенным равномерным противодействием по кольцевой периферической части внутренней оптической поверхности.
2. Получено общее решение бигармонического уравнения в собственном для (принимающего значения в том же классе) соответствующего оператора классе степенных рядов как бесконечных линейных комбинаций линейно независимых степенных функций применительно к решению осесимметричной упругой задачи без объёмных сил и кручения через функцию напряжений Лява.
3. Созданы общий (полу)степенной метод решения существенно трёхмерных осесимметричных упругих задач для сплошных и кольцевых цилиндрических тел и их сопряжений под кусочно-постоянными давлениями и на его основе общий аналитический метод расчёта напряжённо-деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела целиком, в частности светопрозрачного элемента, основанный на представлении такого тела в виде соединения его круглой центральной и кольцевой периферической частей и на сопряжении соответствующих решений, полученных с использованием функции напряжений Лява шестой степени с множителем четвёртой степени у логарифма относительного радиуса. Граничные условия удовлетворяются точно на плоскопараллельных основаниях и приближённо на боковой поверхности и на поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей такого тела.
4. Открыто явление ограничения не только снизу, но и сверху степени функции напряжений граничными условиями задачи.
5. Созданы три аналитических метода минимизации невязок сопряжения решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела целиком, в частности светопрозрачного элемента, на его боковой поверхности и на поверхности сопряжения частей среднеквадратично, минимаксами модулей невязок сопряжения и коллокационно.
6. Открыты и обоснованы три принципиально новых явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность. При отсутствии давления на боковую поверхность открыты и обоснованы явление и закон существенного нарушения взаимной противоположности радиальных напряжений в центрах оснований по теории пластин и по теории плит. Открыты и обоснованы явление и закон существования взаимосвязанных критических значений коэффициента поперечной деформации Пуассона и не меньшего  $5/8$  отношения давлений на боковую поверхность и на полностью нагруженное основание для утонения или утолщения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела вдоль его оси. Открыты и обоснованы явление и закон кратного превышения, например в три-четыре раза, стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания соответственно стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента), главные в его деформирования вопреки одинаковости искривлений частично нагруженного основания и полностью нагруженного основания по теории пластин и по теории плит.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 120/244

### **3. ПРОВЕРКА ДОСТОВЕРНОСТИ СОЗДАННОГО ОБЩЕГО (ПОЛУ)СТЕПЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА МАКРОЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОБЩИХ ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ СПЛОШНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, В ЧАСТНОСТИ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

#### **3.1. Сравнение с известными аналитическими методами теории пластин и теории плит для методической, аналитической и численной проверки и оценки достоверности созданного общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов для общих теорий деформирования, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов**

Представляется целесообразным сопоставить формулы (2.52) – (2.55), (2.52') и (2.54') замкнутого решения по созданному общему (полу)степенному методу для напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания с известными формулами [56, 179] задачи теории пластин при тех же граничных условиях на основаниях, а также с имеющимися решениями задач об изгибе круглых плит при опирании или жёстком защемлении края.

Известными формулами теории пластин и теории плит давление  $p_1$  на боковую поверхность не рассматривается, и поэтому в решении (2.52) – (2.55), (2.52') и (2.54') принимаем  $p_1 = 0$ .

Проведём такие сопоставления в методическом, аналитическом и численном аспектах.

Методическое отличие решения по общему (полу)степенному методу от решения теории пластин [56, 179] при тех же граничных условиях на основаниях заключается в характерном для теории упругости отказе от упрощающих гипотез теории пластин, ведущем к появлению дополнительных слагаемых, которые в формулах (2.52) – (2.55), (2.52') и (2.54') подчёркнуты. При  $h \ll a_1$  эти дополнительные слагаемые пренебрежимо малы по сравнению с остальными слагаемыми, которые соответствуют теории пластин. Итак, общим (полу)степенным методом достигнуто обобщение теории пластин применительно к рассматриваемой задаче. В численном аспекте (табл. 3.1) наиболее характерны две величины, а именно стрела прогиба  $u_z(a_1, 0)$  круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного внутреннего основания  $z = 0$  и единое значение радиального и тангенциального (окружного) напряжений  $\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$  в центре частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при прежнем отношении его внешнего радиуса  $a$  к радиусу  $a_1$  круглой центральной части  $a/a_1 = 55 \text{ мм} / 30 \text{ мм} = 11/6$  и при произвольной толщине (высоте)  $h$ .

Относительные погрешности теорий пластин и плит по сравнению с созданным общим (полу)степенным методом при двухпараметрическом методе устранения среднеквадратично минимизированной невязки осевого перемещения  $u_z(a_1, z)$  в перемещениях и напряжениях

$$\delta'_u = (u_z(a_1, 0) - u_z(a_1, 0)_{h \ll a_1}) / u_z(a_1, 0),$$

$$\delta'_\sigma = (\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(0, 0)_{h \ll a_1}) / \sigma_r(0, 0)$$

показаны в зависимости от отношения  $h/a_1$  на рис. 3.1.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 121/244

Таблица 3.1. Сопоставление формул для безразмерных стрелы прогиба ненагруженной центральной части и единого значения радиального и тангенциального (окружного) напряжений в центре этой части при изгибе равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, по созданному общему (полу)степенному методу (ОСМ), по теории пластин и теории плит.

| Объект (модель), граничные условия, метод (теория), формулы   | Безразмерная стрела прогиба ненагруженной части<br>$E/(ph) u_z(a_1, 0)$  | Безразмерное единое значение наибольшего напряжения на оси<br>$\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_t(0, 0)/p$  |
|---|--|--|
| Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, периферическое противодействие, ОСМ, двухпараметрический метод устранения невязки $u_z(a_1, z)$ , (2.52), (2.53) | $\frac{(1+m)\mu(1+\mu) + (1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \delta + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$  | $\frac{(m+\mu+m\mu)/2 + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$ |
| Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, периферическое противодействие, ОСМ, однопараметрический метод устранения невязок, (2.52'), (2.53)               | $\frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$ | $\frac{(m+\mu+m\mu)/2 + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$ |
| Круглая пластина, периферическое противодействие, теория пластин  | $\frac{(3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$   | $\frac{(3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$                  |
| Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, край свободно опёрт, ОСМ, (2.40)   | $\frac{(1/4)(1+m)(1-\mu)(2+\mu)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(5+\mu)a_1^4/h^4}$   | $\frac{(1/4)m(2+\mu) + (3/8)(3+\mu)a_1^2/h^2}$   |
| Круглая плита, край свободно опёрт, теория плит   | $\frac{(3/10)(1-\mu)(2+\mu)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(5+\mu)a_1^4/h^4}$   | $\frac{(1/20)(2+\mu) + (3/8)(3+\mu)a_1^2/h^2}$   |
| Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, край жёстко защемлён, ОСМ, (2.38)  | $\frac{(1/4)(1+m)(1+\mu)(2-\mu)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu^2)a_1^4/h^4}$  | $\frac{(1/4)m(1+\mu)(2-\mu)/(1-\mu) + (3/8)(1+\mu)a_1^2/h^2}$  |
| Круглая плита, край жёстко защемлён, теория плит  | $\frac{(3/10)(1+\mu)(2-\mu)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu^2)a_1^4/h^4}$  | $\frac{(1/20)(1+\mu)(2+\mu)/(1-\mu) + (3/8)(1+\mu)a_1^2/h^2}$  |

Оказывается, что теория пластин при любых отношениях  $h/a_1$  занижает стрелу прогиба  $u_z(a_1, 0)$  и наибольшее напряжение  $\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$ , причём стрелу прогиба в гораздо большей степени, чем наибольшее напряжение, и применима в пределах  $h/a_1 \leq 1/2$ ,

что примерно соответствует отношению толщины (высоты)  $h$  к внешнему радиусу  $a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,  $h/a \leq 1/4$ , при этом  $\delta'_u < 0.11$ ;  $\delta'_\sigma < 0.03$ .

Напряжения же достаточно надёжно определяются при  $h/a_1 \leq 1$  и примерном отношении толщины (высоты)  $h$  к внешнему радиусу  $a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента)  $h/a \leq 1/2$ :  $\delta'_\sigma < 0.11$ .

Проведём сопоставление решений по созданному общему (полу)степенному методу с известными решениями задач по теории плит.

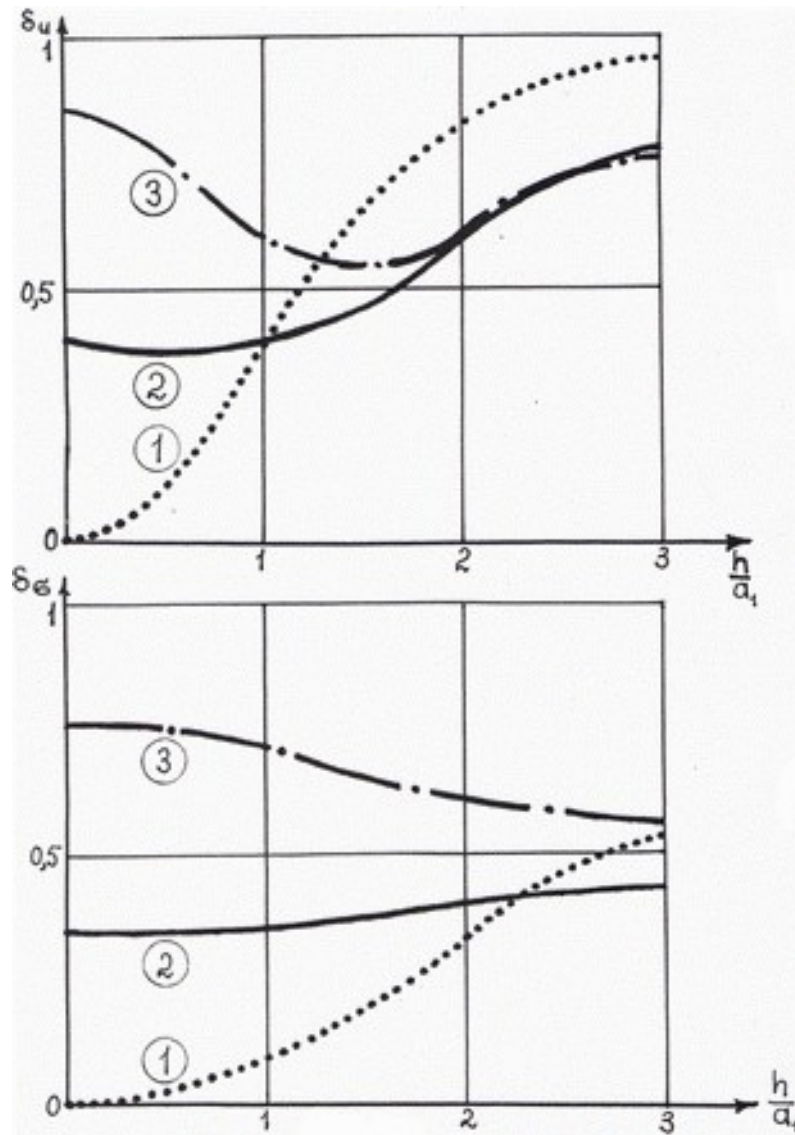


Рисунок 3.1. Относительные погрешности расчётов стрелы прогиба  $u_z(a_1, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания (вверху) и наибольшего напряжения  $\sigma_r(0, 0)$  (внизу) по известным решениям теории пластин (пунктирная кривая линия) и теории плит для случаев свободно опёртого (сплошная кривая линия) и жёстко защемлённого края (штрих-пунктирная кривая линия) по сравнению с расчётами по созданному общему (полу)степенному методу при двухпараметрическом методе устранения среднеквадратично минимизированной невязки осевого перемещения  $u_z(a_1, z)$ .

Методические отличия созданного общего (полу)степенного метода состоят в его учёте отсутствующей в теории плит схемы нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и соответственно в мысленном рассечении такого тела на круглую центральную и кольцевую периферическую части и в сопряжении решений для этих частей.

Кроме того, созданный общий (полу)степенной метод даёт решения для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, свободно опёртого (2.40) или жёстко защемлённого (2.38) по краю, в частности при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения даёт известные решения [3, 104, 105,

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 123/244

166] для круглой плиты, свободно опертой или жёстко защемлённой по краю соответственно, и тем самым существенно обобщает теорию плит, поскольку не только отказывается от её ограничений относительной толщины плиты, но и дополнительно предусматривает ещё два метода минимизации невязок сопряжения, а именно минимаксами их модулей и коллокационно аннулированием четырёх значений (среднего, на основаниях и посередине).

С методической точки зрения важно отметить, что эти известные решения задач по теории плит были получены индуктивным путём, причём оставался полностью открытым вопрос о возможностях уточнения решений при сохранении шестой степени функции напряжений или путём её повышения.

А созданным общим (полу)степенным методом строго доказана единственность шестой степени функции напряжений.

Минимизация невязок сопряжения хотя по существу и проводилась теорией плит, но в каждом из указанных обоих случаев односторонне, при этом по-разному и с использованием подходов теории пластин (в терминах сил и моментов на краю плиты).

А созданным общим (полу)степенным методом предусматриваются практически все рациональные методы минимизации невязок сопряжения, анализируются различия и взаимосвязи между ними с методическими единством и универсальностью и с определением мест известных решений задач по теории плит в кругу задач, решаемых созданным общим (полу)степенным методом.

Что касается аналитического и численного аспектов сравнения, во-первых, общего (полу)степенного метода при отсутствующей в теории плит схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и, во-вторых, теории плит в каждом из указанных обоих случаев (свободно опертого или жёстко защемлённого края), то ввиду несоответствия граничных условий не следует ожидать ни общности формул (см. табл. 3.1), ни малости погрешностей расчёта (см. рис. 3.1). Следовательно, в отличие от задачи теории пластин при соответствующих граничных условиях, решения задач теории плит при иных, хотя и сходных, граничных условиях неприменимы вовсе.

Таким образом, созданный общий (полу)степенной метод вполне согласуется с известными аналитическими решениями, обобщает их, определяет их место, погрешности и пределы применимости, сохраняет их простоту и удобство для инженерных приложений и в то же время существенно уточняет их, имеет перед ними методические преимущества и позволяет открыть и обосновать принципиально новые явления и законы напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, которые коренным образом исправляют, развивают и заменяют известные представления о его деформировании.

Однако известные аналитические решения не позволяют проверить открытые созданным общим (полу)степенным методом три принципиально новых явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, по сравнению с известными закономерностями напряжённо-деформированных состояний круглых пластин и круглых плит при осесимметричном изгибе равномерными давлениями.

Для такой проверки становится необходимым использование численных методов расчёта напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 124/244

### **3.2. Численная конечно-элементная проверка достоверности созданного общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов для общих теорий деформирования, прочности и разрушения, открытие и обоснование четвёртых основных явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания**

Для численного исследования напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, был выбран метод конечных элементов (МКЭ).

Использовалась программа «Ротор-Б» Института проблем машиностроения АН УССР [163]. Рассматривались именно существенно трёхмерные сплошные цилиндрические тела, в частности светопрозрачные элементы, из неорганического стекла К8 и органического стекла ТОСП (характеристики этих материалов см. в табл. 1.1) размерами

$$\begin{aligned}h &= 60 \text{ мм,} \\a_1 &= 30 \text{ мм,} \\a &= 55 \text{ мм}\end{aligned}$$

при давлениях

$$\begin{aligned}p &= 98 \text{ МПа, } p_1 = 0, \\p_1 &= p = 98 \text{ МПа,} \\p_1 &= p_2 = 140 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Использовались две схемы разбиения рассматриваемой области осевого сечения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, на прямоугольные конечные элементы. В числовые массивы этих двух схем разбиения в качестве промежуточных включались значения (в миллиметрах) соответственно:

$$\begin{aligned}1) r &= 6; 12; 18; 24; 30; 32.5; 35; 37.5; 40; 42.5; 45; 47.5; 50; 52.5; \\z &= 7.5; 15; 22.5; 30; 37.5; 45; 52.5; \\2) r &= 6; 12; 18; 24; 30; 32.5; 35; 37.5; 40; 42.5; 45; 47.5; 50; 52.5; \\z &= 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55.\end{aligned}$$

Результаты расчётов при выборе различных схем разбиений на конечные элементы хорошо согласуются между собой и приводят к единой картине напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента. Для напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8

характерные эпюры при  $p_1 = p$  показаны на рис. 3.2,

изолинии при  $p_1 = 0$  – на рис. 3.3

и при  $p_1 = p$  – на рис. 3.4.

Сравнение результатов расчёта напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 по методу конечных элементов при различных значениях бокового давления  $p_1$  подтверждает как значительное влияние приложения давления к боковой поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, на его напряжённо-деформированное состояние, так и применимость принципа наложения (суперпозиции).

Показано, что имеющие место при отсутствии бокового давления  $p_1 = 0$  растягивающие радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, при равенстве бокового давления внешнему давлению  $p_1 = p$  в данном случае вообще не возникают.

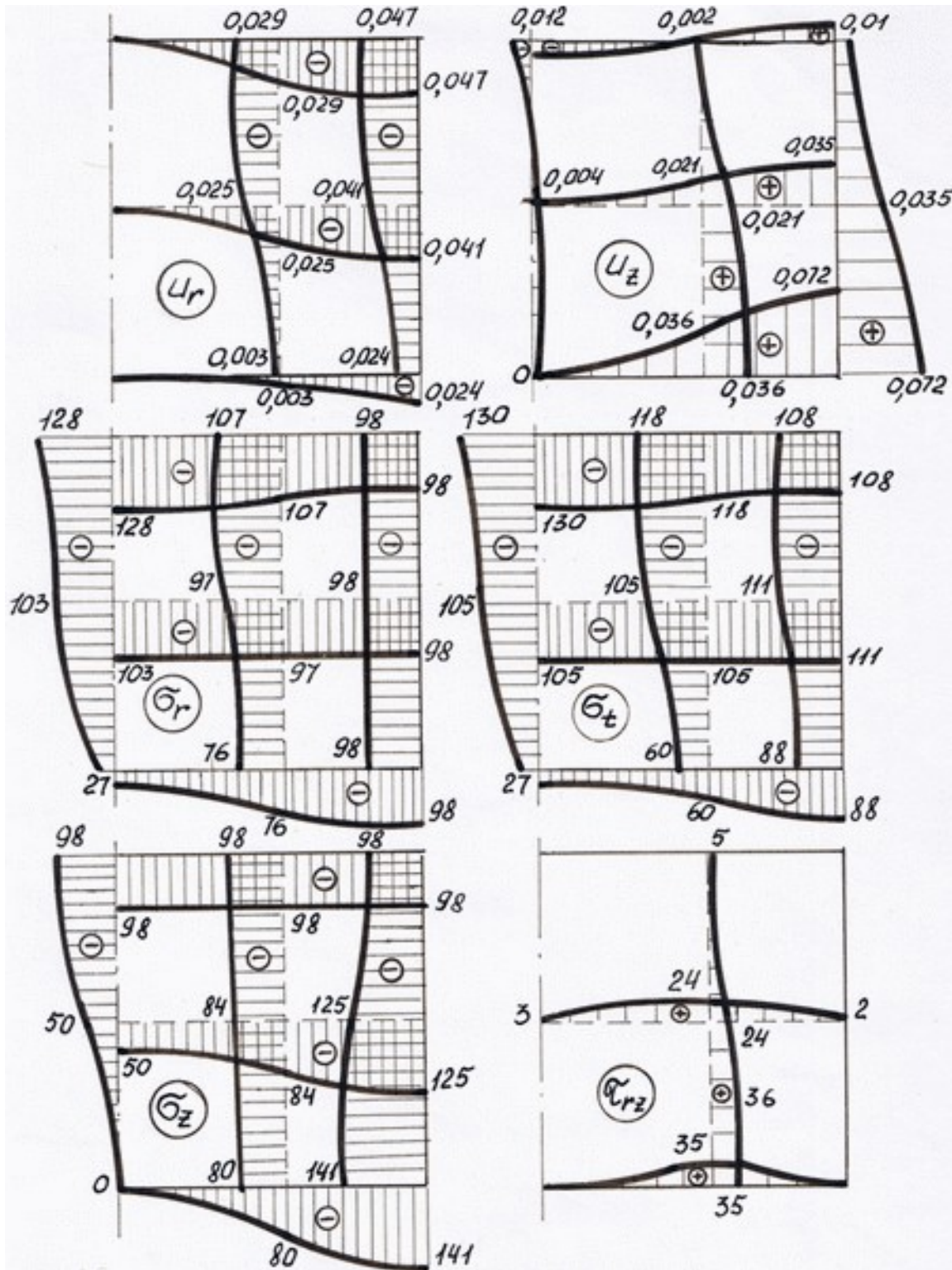


Рисунок 3.2. Эпюры перемещений (в миллиметрах) и напряжений (в мегапаскалях), определённые расчётом по методу конечных элементов, в сечениях

$$z = 0, z = h/2, z = h,$$

$$r = 0, r = a_1, r = a$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами

$$a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}, h = 60 \text{ мм}$$

из стекла К8 при давлениях  $p = p_1 = 98 \text{ МПа}$ .



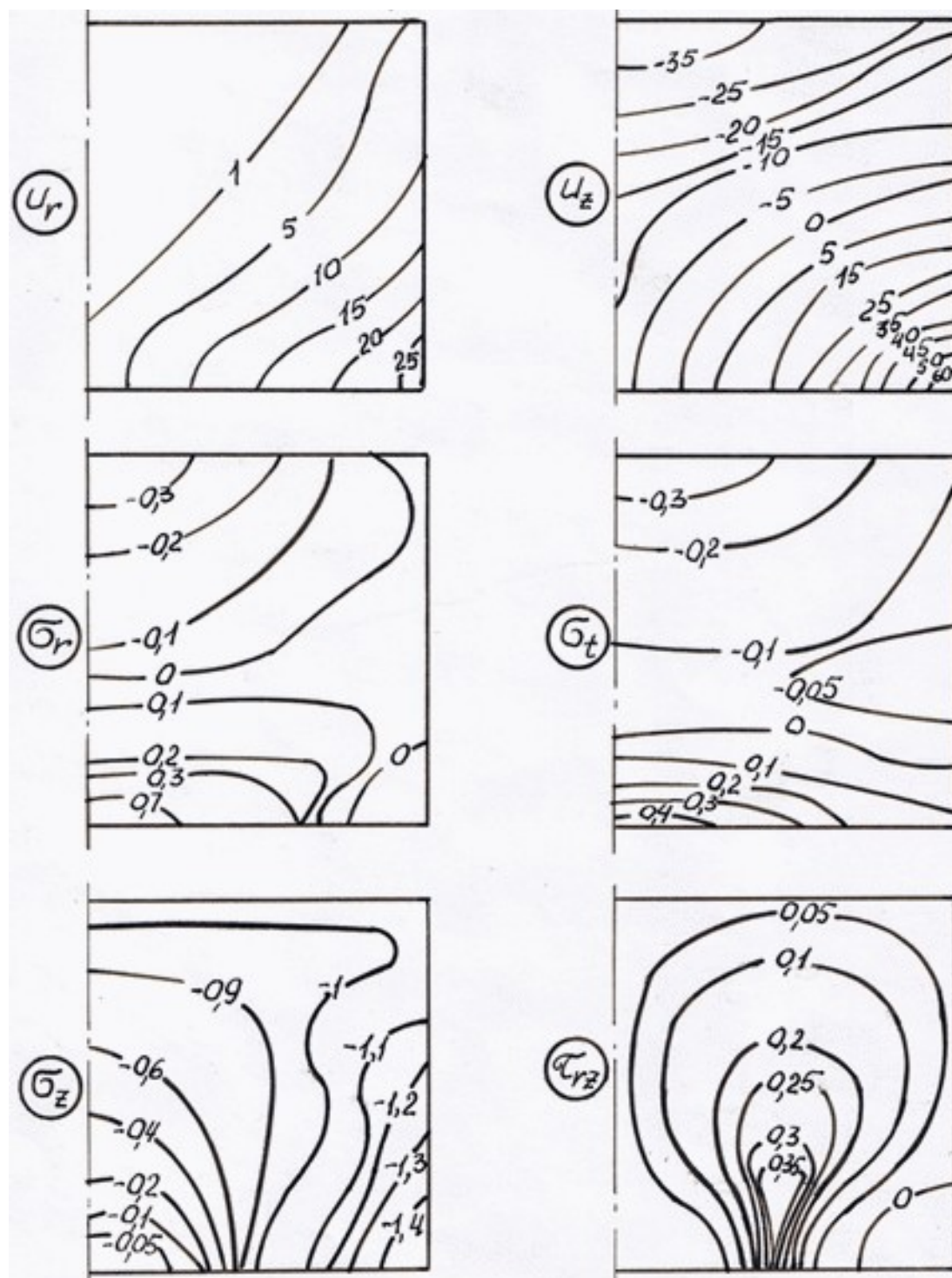


Рисунок 3.3. Изолинии перемещений (в микрометрах) и напряжений (делённых на  $p$ ) согласно расчёту по методу конечных элементов именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами

$$a_1 = 30 \text{ мм},$$

$$a = 55 \text{ мм},$$

$$h = 60 \text{ мм}$$

из стекла К8 при давлениях

$$p = 98 \text{ МПа и}$$

$$p_1 = 0.$$

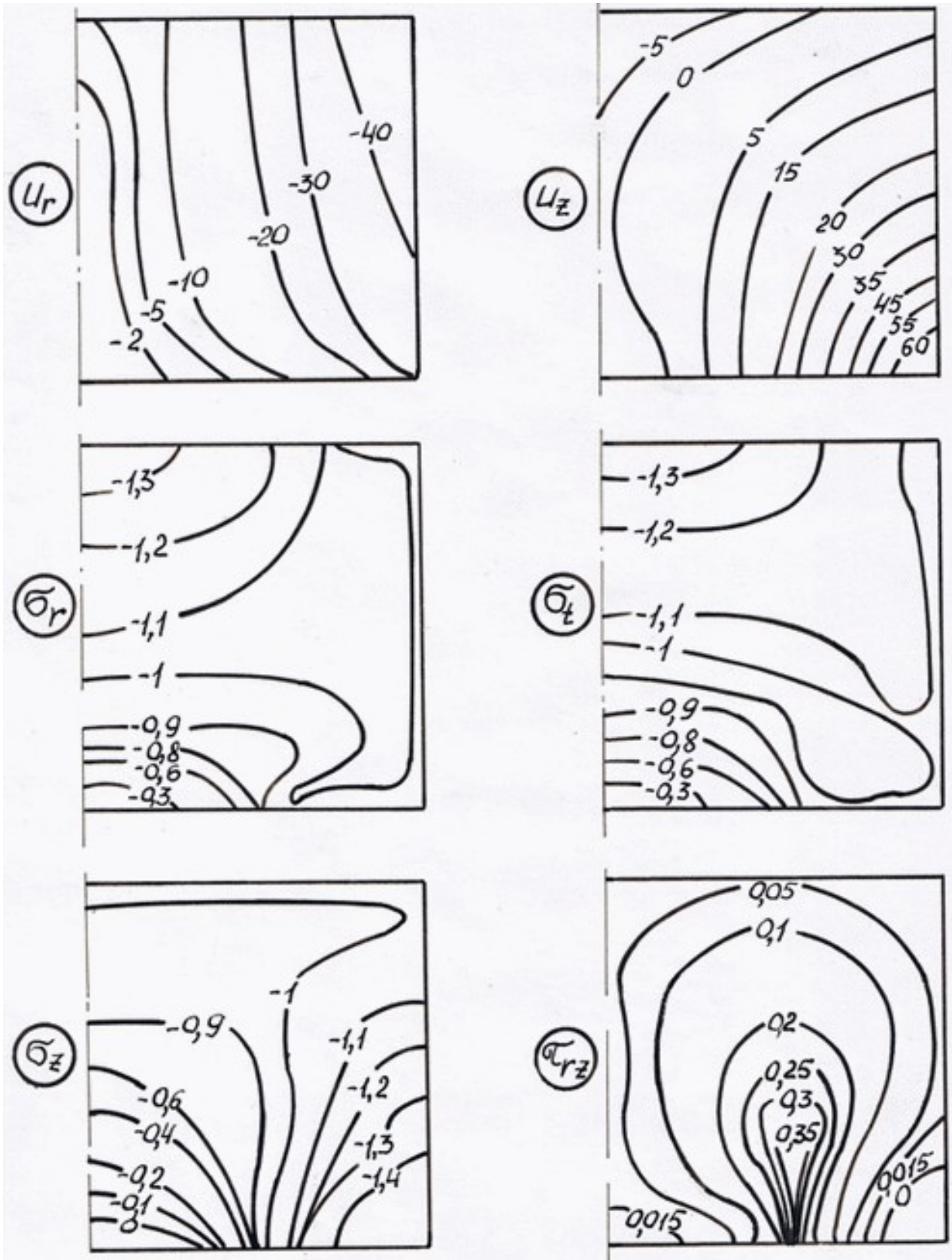


Рисунок 3.4. Изолинии перемещений (в микрометрах) и напряжений (делённых на  $p$ ) согласно расчёту по методу конечных элементов именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами  $a_1 = 30$  мм,  $a = 55$  мм,  $h = 60$  мм из стекла К8 при давлениях  $p = p_1 = 98$  МПа.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 128/244

Численная конечно-элементная проверка достоверности созданного общего (полу)степенного метода полностью подтверждает все три открытых этим методом принципиально новых явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, причём с коренными отличиями от известных закономерностей напряжённо-деформированных состояний круглых пластин и круглых плит при осесимметричном изгибе равномерными давлениями.

Во-первых, конечно-элементные эпюры радиального напряжения полностью подтверждают наличие существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от умноженного на минус два давления на боковую поверхность, в частности существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от нуля при отсутствии давления на боковую поверхность, и тем самым первые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Во-вторых, конечно-элементные эпюры осевого перемещения при распространении внешнего давления на боковую поверхность показывают утонение и утолщение вдоль продольной оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из неорганического стекла К8 и органического стекла соответственно, что подтверждает вторые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

В-третьих, и это самое главное, конечно-элементные эпюры осевого перемещения показывают кратное превышение стрел прогиба круглой центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба круглой центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, что полностью подтверждает третье явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Сопоставление представленных эпюр показывает, что результаты определения перемещений и напряжений по созданному общему (полу)степенному методу (см. рис. 2.12) и по методу конечных элементов (см. рис. 3.2) в основном вполне приемлемо с инженерной точностью согласуются между собой.

Однако метод конечных элементов показывает, что правильно по величине определённый созданным общим (полу)степенным методом достигаемый на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей максимум  $\tau_{\max}$  сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  смещён с середины толщины (высоты) в сторону частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, а главное, в малой окрестности края  $(a_1, 0)$  ненагруженной круглой центральной части

$$0 \leq r \leq a_1$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 129/244

частично нагруженного основания тела (элемента) действует сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$  величиной, весьма близкой к его максимуму  $\tau_{\max}$ .

Четвёртые явление и закон напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

В-четвёртых, и это необходимо для правильного исследования прочности, конечно-элементная проверка достоверности общего (полу)степенного метода привела к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона смещения точки правильно по величине определённого созданным общим (полу)степенным методом достигаемого именно на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей максимума  $\tau_{\max}$  сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  с середины толщины (высоты) в сторону частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, причём в малой окрестности края  $(a_1, 0)$  ненагруженной круглой центральной части частично нагруженного основания тела (элемента) действует сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$  величиной, весьма близкой к его максимуму  $\tau_{\max}$ , так как центральная часть частично нагруженного основания не нагружена, а повышенное равномерное противодействие действует лишь на периферическую его часть, так что именно на краю  $(a_1, 0)$  ненагруженной круглой центральной части частично нагруженного основания тела (элемента) имеет место по модулю превышающий внешнее давление скачок осевого напряжения и тем самым наибольшей по величине срез (сдвиг).

Следует заметить, что теория пластин вообще пренебрегает сдвиговым напряжением, а теория плит располагает точку максимума  $\tau_{\max}$  сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  именно посередине толщины плиты и вообще не рассматривает смещения точки этого максимума с середины толщины плиты.

Тем самым открыты и обоснованы четвёртые явление и закон напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Применительно к трём предыдущим открытым и обоснованным явлениям и законам напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность наибольший интерес представляет сопоставление результатов определения осевого перемещения  $u_z(r, z)$ , поскольку как раз таким путём можно досконально проверить достоверность наличия главного из открытых и обоснованных созданным общим (полу)степенным методом принципиально новых явлений и законов напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, которые коренным образом исправляют, развивают и заменяют классические и другие известные представления о закономерностях осесимметричного деформирования круглых пластин и круглых плит под равномерными давлениями, в особенности применительно к характеру деформирования оснований как оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 130/244

Кроме того, рассмотрим именно существенно трёхмерный сплошной цилиндрический элемент, в частности светопрозрачный, как из неорганического стекла, так и из органического стекла, для которых коэффициент поперечной деформации Пуассона имеет существенно различные значения.

Эпюры осевых перемещений  $u_z(r, 0)$  и  $u_z(r, h)$  внутренней  $z = 0$  и внешней  $z = h$  оптических поверхностей соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента показаны на рис. 3.5.

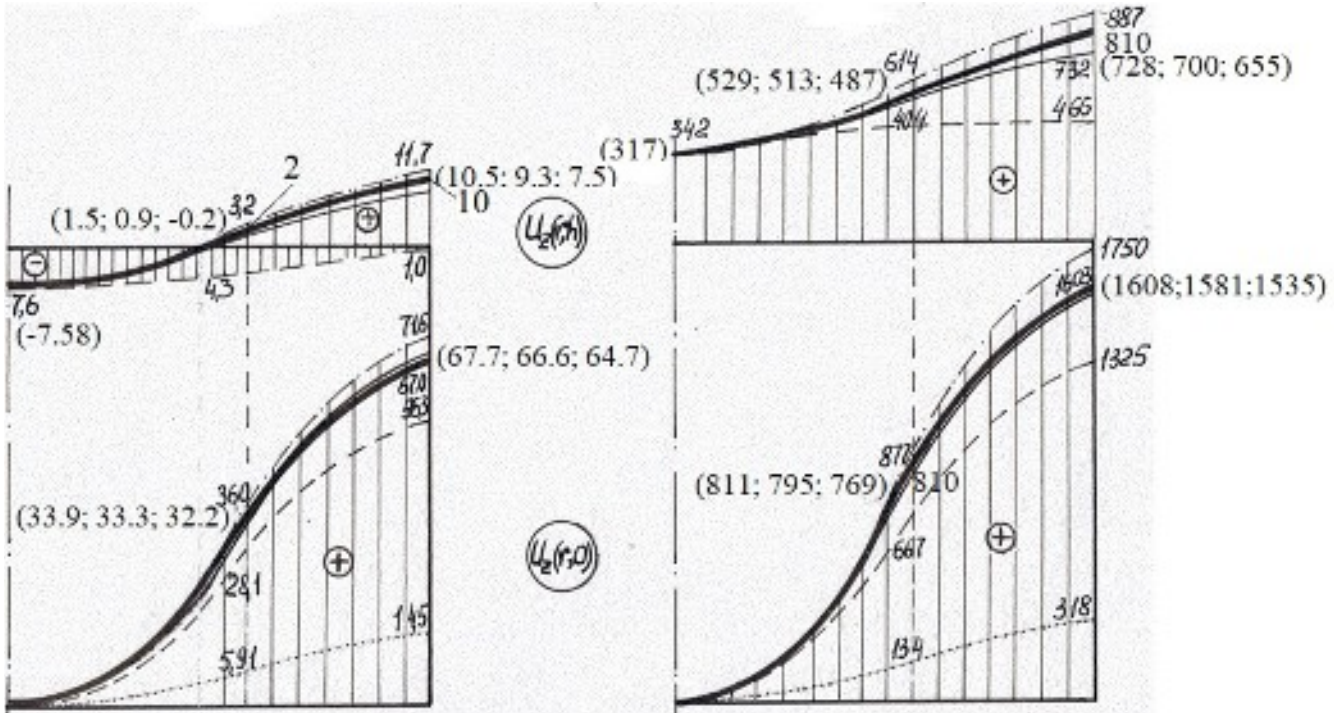


Рисунок 3.5. Сопоставление осевых перемещений (в микрометрах)  $u_z(r, 0)$  и  $u_z(r, h)$  внутренней  $z = 0$  и внешней  $z = h$  оптических поверхностей (оснований) соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), в частности оптических поверхностей светопрозрачного элемента из неорганического стекла (слева) или органического стекла (справа), определённых по методу конечных элементов (толстая сплошная кривая), по созданному общему (полу)степенному методу, в частности с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения (тонкая сплошная кривая), по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей (тонкая штриховая кривая) и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения (тонкая штрихпунктирная кривая), с использованием однопараметрического метода устранения невязок (в круглых скобках итоги по методам 1, 2, 3 соответственно) и по теории пластин (тонкая пунктирная кривая).

Видно, что соответствующие значения осевого перемещения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе из неорганического стекла или органического стекла, определяющие стрелы прогиба оснований и их центральных частей и определённые по методу конечных элементов и по созданному общему (полу)степенному методу, в частности с использованием однопараметрического метода устранения невязок по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения, а также с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 131/244

по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, достаточно близки между собой.

Эти значения принадлежат соответствующим более широким промежуткам между нижним и верхним соответственно значениями с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения соответственно.

Таким образом, расчёты по методу конечных элементов выявляют наличие в малой окрестности края ( $a_1, 0$ ) ненагруженной внутренней поверхности круглой центральной части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, величин сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$ , близких к его максимуму  $\tau_{\max}$ , что можно рассматривать как локальное возмущение напряжённо-деформированного состояния, соответствующего аналитическому решению по созданному общему (полу)степенному методу.

Тем самым конечно-элементная проверка достоверности созданного общего (полу)степенного метода привела к открытию четвёртых явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Кроме того, расчёты по методу конечных элементов подтверждают как достаточную точность формул (2.52) – (2.55), (2.52') и (2.54') по общему (полу)степенному методу, в частности

с использованием однопараметрического метода устранения невязок

по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения,

по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и

по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения, а также

с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения

по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения,

так и правильность открытых и обоснованных созданным общим (полу)степенным методом принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

### **3.3. Экспериментальная проверка достоверности созданных общего (полу)степенного метода и теорий деформирования, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания**

В лаборатории прочности кафедры сопротивления материалов Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина были выполнены экспериментальные исследования деформирования и разрушения именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов из неорганического и органического стекла, помещаемых в камеру (рис. 3.6).

Гидростатическое давление в камере до 245 МПа создавали с помощью модернизированной (с электромагнитным регулятором подачи и с электрическим приводом на сбросный клапан) и благодаря этому дистанционно управляемой насосной установки УНГР-2000.

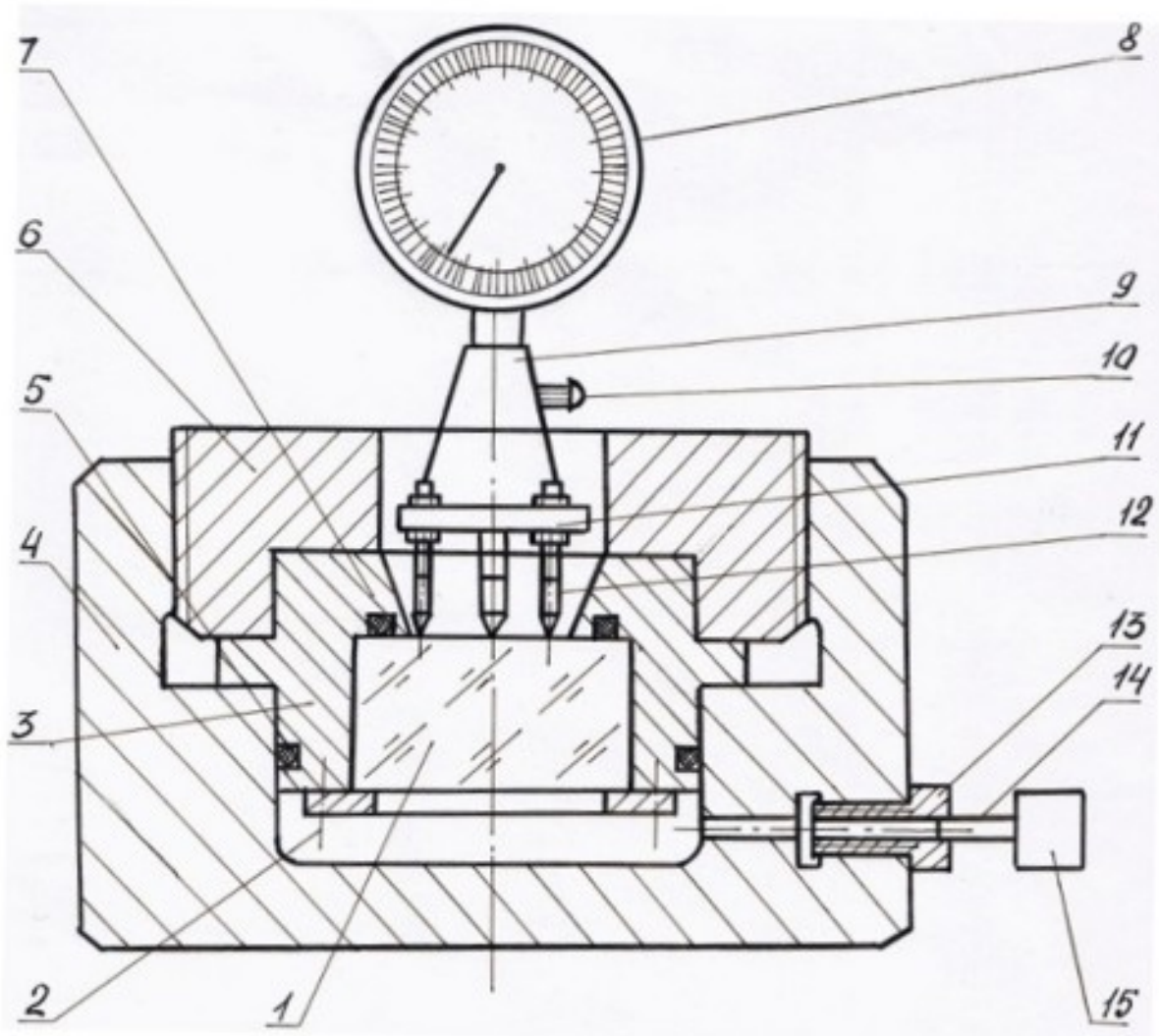


Рисунок 3.6. Камера для экспериментальных исследований деформирования и разрушения именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов из неорганического и органического стекла: 1 – стеклоэлемент; 2 – крепёжные элементы; 3 – оправка; 4 – корпус; 5 – уплотнение оправки; 6 – крепление оправки; 7 – уплотнение стеклоэлемента; 8 – микрометр; 9 – корпус измерителя; 10 – крепление микрометра; 11 – измерительный элемент; 12 – опорная ножка; 13 – штуцер; 14 – трубопровод; 15 – насосная станция с манометром.

Давления измеряли манометрами

ОБМГ 81-160 класса 1.5 (в диапазоне давлений до 98 МПа)

и

СВ 2500 класса 1 (в диапазоне давлений от 98 до 245 МПа).

Созданный общий (полу)степенной метод и теории деформирования, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность открыли явление кратного превышения стрел прогиба круглой центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба круглой центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно как главенствующую особенность деформирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 133/244

вопреки одинаковости искривлений обоих оснований по теории круглых пластин и теории круглых плит.

Поэтому экспериментальная проверка достоверности созданных общего (полу)степенного метода и теорий деформирования, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность сосредоточилась на измерении именно и только осевого перемещения точек вблизи края  $r = a_1 = 30$  мм ненагруженной центральной части частично нагруженного основания относительно её центра индикатором (микрометром) часового типа (с ценой деления 2 мкм в опытах с неорганическим стеклом и 10 мкм в опытах с органическим стеклом), установленным на опоре, включающей [110] три ножки (см. рис. 3.6), внутренние края заострённых концов которых лежат на окружности радиусом  $r = 26$  мм. Камеру располагали таким образом, что свободный от нагрузки световой участок ориентированной горизонтально внутренней в иллюминаторе и внешней в камере оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, был обращён вверх (см. рис. 3.6), и на этот участок соосно устанавливали микрометр на опоре. Наблюдение за манометром, микрометром и ходом эксперимента в целом осуществляли из соседнего помещения благодаря телевизионным установкам. Показания микрометра, установленного в таком положении, соответствовали перемещению конца измерительного стержня относительно концов ножек опоры, которое в точности равняется величине осевого перемещения  $u_z(r, 0)$ .

Непринципиально, что при лабораторной имитации условий подводного погружения гидростатическое давление действует изнутри, а не извне, поскольку в обоих случаях речь идёт о перемещениях поверхности, свободной от давления, а перемена направления оси Oz сопровождается переменной ролью уменьшаемого и вычитаемого в стреле прогиба как разности перемещений, так что нет расхождений не только в величине, но и в знаке.

Что касается некоторого несоответствия в распределении контактного давления оправы на сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент (в отличие от гидростатического давления, равномерного по закону Паскаля, контактное давление не обязано быть таковым), то как раз эксперимент и даёт возможность оценить влияние погрешностей выбора схемы нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность на деформирование в случае отличных от рассматриваемой конструкций иллюминаторов для высоких давлений.

Для анализа результатов сопоставления экспериментальных и теоретических данных о стреле прогиба  $u_z(r, 0)$  участка ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нужно оценить погрешности сопоставления результатов прямого измерения стрелы прогиба  $u_z(r, 0)$  и косвенного её определения по соответствующей формуле (2.52) с учётом измеряемых величин давлений.

Можно считать, что предельная абсолютная погрешность прямого измерения складывается из погрешности микрометра и погрешности отсчёта, равной половине цены деления микрометра  $\Delta_{\text{умк}}$ , и составляет примерно цену деления микрометра  $\Delta_{\text{умк}}$ , то есть 2 мкм и 10 мкм в опытах с неорганическим и органическим стеклом соответственно независимо от давления  $p$ .

Сложнее обстоит дело с погрешностью косвенного определения.

Применив метод [77, 141] полного дифференцирования стрелы прогиба  $u_z(r, 0)$  как функции многих переменных  $p, E, \mu, h, a, a_1, r$  с заменой их дифференциалов предельными

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 134/244

абсолютными погрешностями  $\Delta p$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta a_1$ ,  $\Delta r$ , с заменой производных абсолютными величинами этих производных и обозначив

$$u = u_z(r, 0) = (p/E)h \left\{ [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2) r^4/h^4 + (1/2)(1+\mu) a^2/(a^2 - a_1^2) \delta r^2/a_1^2 \right\},$$

с учётом положительности величины  $u$  получаем формулу для предельных относительных погрешностей (ограничимся методом среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения):

$$(3.1)$$

$$\delta_u = |p/u \partial u/\partial p| \delta_p + |E/u \partial u/\partial E| \delta_E + |\mu/u \partial u/\partial \mu| \delta_\mu + |h/u \partial u/\partial h| \delta_h + |a/u \partial u/\partial a| \delta_a + |a_1/u \partial u/\partial a_1| \delta_{a_1} + |r/u \partial u/\partial r| \delta_r = \delta_p + \delta_E + \mu^2(p/E)[r^2/(uh)][(7/20)h^2 a^2/[a_1^2(a^2 - a_1^2)] + 6/5 + (3/4)[(1-\mu)/\mu] a_1^2/h^2 + 3a_1^2 a^2/[h^2(a^2 - a_1^2)]] \ln(a/a_1) - (3/8)r^2/h^2 |\delta_\mu| + |1 + (1-\mu^2)(p/E)[r^2/(uh)][-(7/20)h^2 a^2/[a_1^2(a^2 - a_1^2)] + (3/4)[(1-\mu)/(1+\mu)] a_1^2/h^2 + 3a_1^2 a^2/[h^2(a^2 - a_1^2)]] \ln(a/a_1) - (3/8)r^2/h^2 |\delta_h| + (1-\mu^2)(p/E)[r^2/(uh)][a^2/(a^2 - a_1^2)] - (7/20)a^2/(a^2 - a_1^2) + 3a_1^4/[h^2(a^2 - a_1^2)]] \ln(a/a_1) - (3/2)a_1^2/h^2 |\delta_a| + (1-\mu^2)(p/E)[r^2/(uh)][a_1^2/(a^2 - a_1^2)] - (7/20)(a^2/a_1^2 - 2)h^2 a^2/[a_1^2(a^2 - a_1^2)] + (3/4)[(1-\mu)/(1+\mu)](a^2 - a_1^2)/h^2 + 3a_1^4/[h^2(a^2 - a_1^2)]] \ln(a/a_1) - (3/2)a^2/h^2 |\delta_{a_1}| + |2 - (3/8)(1-\mu^2)(p/E)[r^4/(uh^3)]| \delta_r.$$

Аналогична формула для среднеквадратичных относительных погрешностей:

$$(3.2)$$

$$v_u^2 = (p/u \partial u/\partial p)^2 v_p^2 + (E/u \partial u/\partial E)^2 v_E^2 + (\mu/u \partial u/\partial \mu)^2 v_\mu^2 + (h/u \partial u/\partial h)^2 v_h^2 + (a/u \partial u/\partial a)^2 v_a^2 + (a_1/u \partial u/\partial a_1)^2 v_{a_1}^2 + (r/u \partial u/\partial r)^2 v_r^2.$$

Если именно трёхмерный сплошной цилиндрический элемент, в частности светопрозрачный, выполнен из стекла К8 и имеет размеры

$$h = 60 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}, a_1 = 30 \text{ мм},$$

причём

$$r = 26 \text{ мм},$$

то

$$(3.3)$$

$$\delta_u = \delta_p + \delta_E + 0.10\delta_\mu + 0.38\delta_h + 0.28\delta_a + 1.11\delta_{a_1} + 1.97\delta_r;$$

$$v_u^2 = v_p^2 + v_E^2 + 0.01v_\mu^2 + 0.14v_h^2 + 0.08v_a^2 + 1.23v_{a_1}^2 + 3.88v_r^2.$$

В случае органического стекла коэффициенты близки к приведённым и с инженерной точностью можно пользоваться этими же формулами (3.3).

Поскольку значения давления  $p$  принимаются согласно показаниям манометра, то предельная абсолютная погрешность значения давления  $p$  складывается из погрешности прибора и погрешности отсчёта:

$$\Delta p = K'/100 p_{\text{пред}} + (1/2)\Delta_{\text{ршк}},$$

где

$K'$  – класс манометра;

$\Delta_{\text{ршк}}$  – цена деления шкалы манометра;

$p_{\text{пред}}$  – верхний предел шкалы манометра.

В случае элемента из стекла К8 применялся манометр СВ 2500, для которого

$$K' = 1; p_{\text{пред}} = 245 \text{ МПа}; \Delta_{\text{ршк}} = 4.9 \text{ МПа},$$

так что

$$\Delta p = 4.9 \text{ МПа}.$$

При опытах со светопрозрачным элементом из органического стекла

$$K' = 1.5; p_{\text{пред}} = 157 \text{ МПа}; \Delta_{\text{ршк}} = 1.96 \text{ МПа},$$

а значит,

$$\Delta p = 3.3 \text{ МПа}.$$

Среднеквадратичная абсолютная погрешность  $S_p$  значения давления  $p$  складывается из таких же компонентов, но в соответствии с [42, 77, 98, 108, 141] считаем их уменьшенными в  $2^{1/2}$  раза:

$$S_p^2 = (2^{-1/2} K'/100 p_{\text{пред}})^2 + [2^{-1/2} (1/2) \Delta_{\text{ршк}}]^2,$$

что даёт  $S_p = 2.5 \text{ МПа}$  для стекла К8 и  $S_p = 1.8 \text{ МПа}$  для органического стекла.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 135/244

Эти абсолютные погрешности  $\Delta_p$  и  $S_p$  не зависят от давления  $p$ , соответственно относительные погрешности  $\delta_p$  и  $v_p$  обратно пропорциональны давлению  $p$ .

Напротив, остальные относительные погрешности не зависят от давления  $p$ .

Данные о точности модуля продольной упругости Юнга  $E$  и коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$  в [72, 73] отсутствуют, поэтому в соответствии с [96] принимаем

$$v_E = 0.05;$$

$$v_\mu = 0.06.$$

Тогда, полагая

$$\delta_E = 2^{1/2}v_E;$$

$$\delta_\mu = 2^{1/2}v_\mu,$$

получаем

$$\delta_E = 0.07;$$

$$\delta_\mu = 0.085.$$

В связи с измерениями штангенциркулем принимаем абсолютные погрешности измерений толщины  $h$ , радиуса  $a$  боковой поверхности и радиуса  $a_1$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$\Delta_h = \Delta_a = \Delta_{a_1} = 0.1 \text{ мм.}$$

Ввиду возможности эксцентричной установки ножек приспособления для микрометра принимаем абсолютную погрешность измерения радиуса  $r$  окружности, проходящей через острия концов ножек приспособления для микрометра,

$$\Delta_r = 0.5 \text{ мм.}$$

Считаем также соответствующие среднеквадратичные относительные погрешности

$$v_h = 2^{-1/2}\delta_h = 2^{-1/2}\Delta_h/h;$$

$$v_a = 2^{-1/2}\delta_a = 2^{-1/2}\Delta_a/a;$$

$$v_{a_1} = 2^{-1/2}\delta_{a_1} = 2^{-1/2}\Delta_{a_1}/a_1;$$

$$v_r = 2^{-1/2}\delta_r = 2^{-1/2}\Delta_r/r.$$

Тогда при давлении

$$p = 98 \text{ МПа}$$

получаем предельную относительную погрешность  $\delta_u$  стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$\delta_u = 0.17.$$

Парциальные вклады указанных ниже отдельных слагаемых в эту предельную относительную погрешность  $\delta_u$  стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  составляют соответственно:

$$\delta_p = 0.29\delta_u;$$

$$\delta_E = 0.41\delta_u;$$

$$0.10\delta_\mu = 0.05\delta_u;$$

$$0.38\delta_h = 0.004\delta_u;$$

$$0.28\delta_a = 0.003\delta_u;$$

$$1.11\delta_{a_1} = 0.02\delta_u;$$

$$1.97\delta_r = 0.22\delta_u.$$

Также при давлении

$$p = 98 \text{ МПа}$$

получаем среднеквадратичную относительную погрешность  $v_u$  стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$v_u = 0.061.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 136/244

Парциальные вклады указанных ниже отдельных слагаемых в квадрат  $v_u^2$  этой среднеквадратичной относительной погрешности  $v_u$  стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  составляют:

$$\begin{aligned} v_p^2 &= 0.17v_u^2; \\ v_E^2 &= 0.68v_u^2; \\ 0.01v_\mu^2 &= 0.01v_u^2; \\ 0.14v_h^2 &= 0.00005v_u^2; \\ 0.08v_a^2 &= 0.00003v_u^2; \\ 1.23v_{a_1}^2 &= 0.002v_u^2; \\ 3.88v_r^2 &= 0.14v_u^2. \end{aligned}$$

Теперь очевидны влияния погрешностей в определении аргументов  $p$ ,  $E$ ,  $\mu$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $a_1$ ,  $r$  стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, как функции этих аргументов на погрешности её значений  $u = u_z(r, 0)$ .

Важными оказываются погрешности в определении давления  $p$ , модуля продольной упругости Юнга  $E$  и радиуса  $r$  окружности, проходящей через острия концов ножек приспособления для микрометра.

Напротив, погрешности в определении коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$ , толщины  $h$ , радиуса  $a$  боковой поверхности и радиуса  $a_1$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, дают несущественные вклады в погрешности стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента. Аналитические зависимости (3.1) – (3.3) чрезвычайно полезны, поскольку позволяют предвидеть погрешности и их значимости и намечать эффективные пути целенаправленного их уменьшения.

Кстати, вывод о слабом влиянии погрешности в определении толщины  $h$  лишний раз подчёркивает специфику деформирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента для высоких давлений.

Ведь при  $h \ll a_1$  влияние погрешности в определении толщины  $h$  было бы существенным.

Отметим формулы взаимосвязей (предельных и среднеквадратичных) абсолютных и относительных погрешностей в определении стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$\begin{aligned} \delta_u &= \Delta_u/u; \Delta_u = u\delta_u; \\ v_u &= S_u/u; S_u = uv_u. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему определяются предельная абсолютная погрешность  $\Delta_u'$  сопоставления вычисленных и измеренных значений стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$\Delta_u' = u\delta_u + \Delta_{\text{шнк}}/2$$

и квадрат  $(S_u')^2$  среднеквадратичной абсолютной погрешности  $S_u'$  сопоставления вычисленных и измеренных значений стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$(S_u')^2 = (uv_u)^2 + \Delta_{\text{шнк}}^2/4.$$

Разумеется, эти предельная абсолютная погрешность  $\Delta_u'$  и среднеквадратичная абсолютная погрешность  $S_u'$  зависят от давления  $p$ , что отражено и на рис. 3.7, на котором показаны итоги сопоставлений результатов расчёта стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  от центра до радиуса  $r$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 137/244

на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического (а) и органического (б) стекла, по созданному общему (полу)степенному методу и методу конечных элементов с экспериментальными данными.

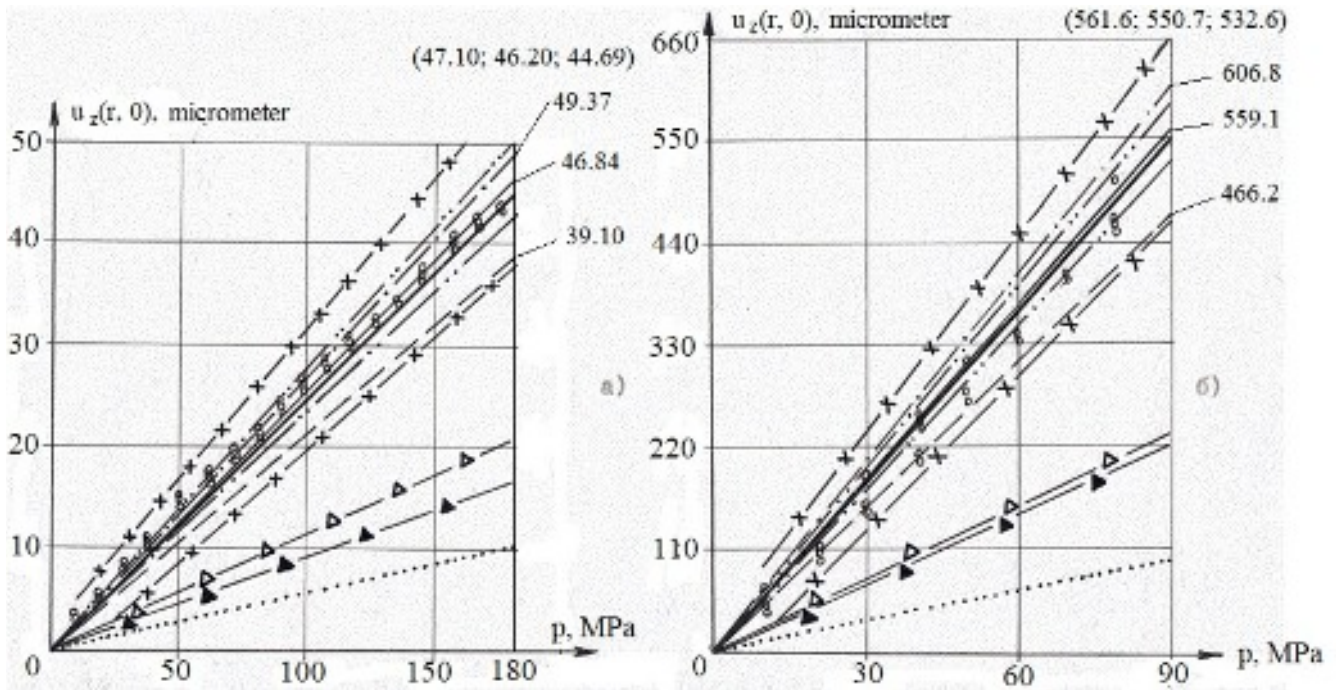


Рисунок 3.7. Сопоставление экспериментальных (кружочки) и расчётных значений (лучи из начала координат) стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  центрального круга радиусом  $r$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания изгибаемого равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического (а) и органического (б) стекла, по методу конечных элементов (толстый луч), по теории изгибаемой равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания круглой пластины (пунктирный луч), по теории изгибаемой равномерным давлением на одно основание свободно опертой по краю круглой плиты (штриховой луч с белыми треугольниками), по теории изгибаемой равномерным давлением на одно основание жёстко закреплённой по краю круглой плиты (штриховой луч с зачернёнными треугольниками), по созданному общему (полу)степенному методу (каждый соответствующий луч однозначно определяется показанной ординатой его точки с наибольшей показанной абсциссой 180 МПа для неорганического стекла и 90 МПа для органического стекла) при использовании двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения (сплошной луч) с верхними и нижними границами предельной (штриховые прямые с крестиками) и среднеквадратичной (штриховые прямые с парами точек) погрешностей, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей (штриховой луч) и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения (штрихпунктирный луч), а также при использовании однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения по методам 1, 2, 3 (в круглых скобках в этом порядке даны ординаты названных точек лучей, тем самым однозначно определённых, но не проведённых ввиду их крайней близости к лучам по методу конечных элементов и по методу 1 при использовании двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения).

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 138/244

Для теоретического обоснования сравнения с экспериментальными данными необходимо и полезно привести вычисления всех указанных ординат названных точек лучей по созданному общему (полу)степенному методу.

Для численных расчётов используются:

радиус того круга на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания, на котором измеряется текущая стрела прогиба,

$$r = 26 \text{ мм},$$

размеры

$$a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}, h = 60 \text{ мм}$$

и соответствующие соотношения размеров

$$h = 2a_1, a = (11/6)a_1,$$

$$r^2/h^2 = 26^2/60^2 = 13^2/30^2 = 169/900,$$

$$r^4/h^4 = 26^4/60^4 = 13^4/30^4 = 169^2/900^2 = 28561/810000,$$

$$r^2/a_1^2 = 26^2/30^2 = 13^2/15^2 = 169/225$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

при наибольшем внешнем давлении

$$p = 180 \text{ МПа}$$

или из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

при наибольшем внешнем давлении

$$p = 90 \text{ МПа},$$

значение  $m$  согласно (2.36) и значение  $\delta$  согласно (2.50).

Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения использует формулу (2.52) для определения осевого перемещения и ввиду  $u_z(0, 0) = 0$  текущей стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_z(r, 0) = (p/E)h \left\{ \left[ \frac{1}{2}(1+m)(1-\mu^2) + \frac{3}{8}(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + \frac{3}{2}(1-\mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \right. \right. \\ \left. \left. \ln(a/a_1) \right] r^2/h^2 - \frac{3}{16}(1-\mu^2) r^4/h^4 + \frac{1}{2}(1+\mu) a^2/(a^2 - a_1^2) \delta r^2/a_1^2 \right\};$$

$$u_z(r, 0) = (p/E)h \left[ \frac{169}{1800}(1+m)(1-\mu^2) + \frac{121}{170} \frac{169}{225} (1+\mu) \delta + \frac{3}{32} \frac{169}{900} (1-\mu)^2 \right. \\ \left. + \frac{363}{680} \frac{169}{900} (1-\mu^2) \ln(11/6) - \frac{3}{16} \frac{28561}{810000} (1-\mu^2) \right].$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $r = 26 \text{ мм}$ ,  $0 \leq r \leq a_1$

при  $p = 180 \text{ МПа}$  составляет

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1-\mu) = (7/20)(1-0.209) = 0.277$$

$$u_z(r, 0) = (180/80600) * \left[ \frac{169}{1800} * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + \frac{121}{170} * \frac{169}{225} * (1 + 0.209) * 0.277 + \frac{3}{32} * \frac{169}{900} * (1 - 0.209)^2 + \frac{363}{680} * \frac{169}{900} * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - \frac{3}{16} * \frac{28561}{810000} * (1 - 0.209^2) \right] * 60 \text{ мм} = 0.04684 \text{ мм};$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 139/244

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

$$u_z(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.209) * 0.198 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.03910 \text{ мм};$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.209) = 0.334$$

$$u_z(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.209) * 0.334 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.04937 \text{ мм}.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $r = 26 \text{ мм}$ ,  $0 \leq r \leq a_1$

при  $p = 90 \text{ МПа}$  составляет

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

$$u_z(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.365) * 0.222 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.365^2)] * 60 \text{ мм} = 0.5591 \text{ мм};$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

$$u_z(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.365) * 0.159 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.365^2)] * 60 \text{ мм} = 0.4662 \text{ мм};$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.365) = 0.281$$

$$u_z(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.365) * 0.281 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.365^2)] * 60 \text{ мм} = 0.6068 \text{ мм}.$$

Однопараметрический метод устранения минимизированных невязок сопряжения использует формулу (2.52') для определения осевого перемещения и ввиду  $u_z(0, 0) = 0$  текущей стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)r^2/h^2 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) * (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) * r^2/a_1^2 + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 * r^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 * r^2/h^2 * a^2/(a^2 - a_1^2) * \ln(a/a_1) - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4];$$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h[(169/1800)(1 + m)(1 - \mu^2) + (206/291)(121/340)(169/225)(1 - \mu^2) + (3/32)(169/900)(1 - \mu)^2 + (363/680)(169/900)(1 - \mu^2)\ln(11/6) - (3/16)(28561/810000)(1 - \mu^2)].$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 140/244

текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $r = 26$  мм,  $0 \leq r \leq a_1$  при  $p = 180$  МПа составляет

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5$$

$$u_{z1}(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.209^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.04710 \text{ мм};$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8$$

$$u_{z1}(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.209^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.04620 \text{ мм};$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0$$

$$u_{z1}(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.209^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.04469 \text{ мм}.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $r = 26$  мм,  $0 \leq r \leq a_1$  при  $p = 90$  МПа составляет

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5$$

$$u_{z1}(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.365^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.5616 \text{ мм};$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8$$

$$u_{z1}(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.365^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.5507 \text{ мм};$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0$$

$$u_{z1}(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.365^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.5326 \text{ мм}.$$

Вполне подтверждаются экспериментально в пределах инженерной точности и хорошо согласуются между собой все те итоги расчётов стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$ , которые дают метод конечных элементов и созданный общий (полу)степенной метод в созданной теории деформирования изгибаемого равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при использовании однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения по всем методам минимизации невязок сопряжения и при использовании двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 141/244

Ближними границами для этих наилучших итогов являются нижняя и верхняя границы среднеквадратичной погрешности по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Дальними границами для этих наилучших итогов являются нижняя и верхняя границы предельной погрешности по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт для этих наилучших итогов промежуточную, причём скорее удалённую, нижнюю границу.

Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения даёт для этих наилучших итогов промежуточную, причём скорее приближённую, верхнюю границу.

Кроме того, экспериментально показано, что кратно заниженные значения стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания изгибаемого равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического и органического стекла, дают все известные аналитические методы, поэтому явно неприемлемые:

теория изгибаемой равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания круглой пластины, сколько-нибудь приемлемая для толщин не более четверти радиуса;

теория изгибаемой равномерным давлением на одно основание свободно опёртой по краю круглой плиты, вообще неприемлемая для изгиба равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания и сколько-нибудь приемлемая для толщин не более четверти радиуса только для изгиба равномерным давлением на одно основание свободно опёртого по краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;

теория изгибаемой равномерным давлением на одно основание жёстко защемлённой по краю круглой плиты, вообще неприемлемая для изгиба равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания и сколько-нибудь приемлемая для толщин не более четверти радиуса только для изгиба равномерным давлением на одно основание жёстко защемлённого по краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Для сопоставления существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, как реального объекта с его расчётной схемой со скачком противодействия от нуля на круглую центральную часть до повышенного равномерного противодействия на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания тела именно при схеме нагружения для изгиба равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания представляются существенными следующие дополнительные соображения.

Во-первых, всегда бывают некоторые местные несоответствия расчётных схем любым реальным объектам, что поэтому не является признаком неприемлемости расчётных схем.

Во-вторых, инженерная точность и поэтому приемлемость решения созданным общим (полу)степенным методом именно в месте скачка противодействия на частично нагруженное основание существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения для изгиба равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания проверена и подтверждена аналитически посредством дополнительного уточнённого расчёта для реального распределения этого скачка по ширине сечения уплотнительного кольца в реальной конструкции иллюминатора, осуществляющей эту схему нагружения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 142/244

В-третьих, инженерная точность и поэтому приемлемость решения созданным общим (полу)степенным методом именно в месте скачка противодействия на частично нагруженное основание существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения для изгиба равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания проверена и подтверждена в настоящей диссертации численно по методу конечных элементов. В пределах инженерной точности установлено именно повсеместное согласование друг с другом аналитических и численных результатов для радиального и осевого перемещений, радиального, окружного (тангенциального) и осевого напряжений. Что касается сдвигового напряжения, то его максимум, аналитически и численно правильно определённый по величине и месту на соответствующей указанному скачку противодействия цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей тела, по созданному общему (полу)степенному методу (как и в теории круглых плит) располагается на пересечении этой поверхности со срединной по высоте (толщине) тела плоскостью, а по результатам метода конечных элементов смещён к окружности скачка противодействия на частично нагруженном основании тела. При этом в малой окрестности этой окружности сдвиговое напряжение очень близко к своему максимуму. Поэтому в решении соответствующей задачи прочности принято, что на этой окружности действует сдвиговое напряжение, равное его максимуму.

В-четвёртых, инженерная точность и поэтому приемлемость решения созданным общим (полу)степенным методом именно в месте скачка противодействия на частично нагруженное основание существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения для изгиба равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания проверена и подтверждена в настоящей диссертации данными многочисленных экспериментов посредством специальной установки с камерой для испытаний иллюминаторов различных конструкций. При этом с инженерной точностью согласуются друг с другом аналитические, численные и экспериментальные данные не только для стрелы прогиба круглой центральной части частично нагруженного основания тела, но и, как будет показано в дальнейшем, для давления и характера разрушения тела. При отсутствии давления на боковую поверхность тела максимум равносильного (эквивалентного) напряжения в теле достигается именно в центре частично нагруженного основания, чему соответствует многократно наблюдавшееся радиальное растрескивание тела из неорганического стекла. Если же на его боковую поверхность распространено внешнее давление, то максимум равносильного (эквивалентного) напряжения достигается именно в месте скачка противодействия, чему соответствует многократно наблюдавшееся скалывание и последующее растрескивание сферического сегмента с ненагруженной круглой центральной частью частично нагруженного основания тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла.

В-пятых, кроме методов и результатов аналитических, численных и экспериментальных исследований влияния концентрации напряжений в месте скачка противодействия на прочность и характер разрушения существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в настоящей диссертации представлен целый ряд таких конструкций иллюминаторов, в том числе защищённых авторскими свидетельствами на изобретения, что конструктивно-технологическими способами значительно снижается указанная концентрация напряжений, соответственно повышается прочность и предотвращается разрушение существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла.

Следовательно, созданный общий (полу)степенной метод и теории деформирования, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного по схеме для изгиба равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 143/244

другого основания, выдерживают не только аналитическую и численную, но и экспериментальную проверку. Сопоставление с известными аналитическими решениями, результатами расчёта по методу конечных элементов и экспериментальными данными подтверждает правомерность принятых допущений и основные явления и законы напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений, выявленные созданным общим (полу)степенным методом, а также возможность его практического использования для проектирования иллюминаторов для высоких давлений.

### 3.4. Выводы по главе 3

1. Для напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность созданный общий (полу)степенной метод аналитически обобщает и численно кратно, примерно на порядок по стрелам прогиба круглой центральной части и всего частично нагруженного основания, уточняет занижающую эти стрелы прогиба теорию круглой пластины, с погрешностью до 11 % применимую для перемещений при толщине до четверти радиуса и для напряжений при толщине до половины радиуса.
2. Метод конечных элементов численно с инженерной точностью подтвердил три первых открытых и обоснованных созданным общим (полу)степенным методом принципиально новых явления и закона и привёл к открытию и обоснованию четвёртых принципиально новых явления и закона напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность. Это явление и закон смещения точки правильно по величине определённого созданным общим (полу)степенным методом достигаемого именно на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей максимума сдвигового напряжения с середины толщины (высоты) в сторону частично нагруженного основания, причём в малой окрестности края ненагруженной круглой центральной части частично нагруженного основания тела (элемента) действует сдвиговое напряжение величиной, весьма близкой с инженерной точностью к его максимуму.
3. Экспериментальными исследованиями стрелы прогиба несколько меньшего ненагруженной круглой центральной части круглого центрального участка частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность с учётом анализа погрешностей исходных данных, измерений и вычислений очень хорошо подтверждаются расчёты по методу конечных элементов и по общему (полу)степенному методу при однопараметрическом и двухпараметрическом методах устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения. Слегка занижены результаты при однопараметрическом методе устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения. При двухпараметрическом методе устранения минимизированной невязки осевого перемещения результат по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей сильно занижен, а по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения существенно завышен.

## 4. ПРИМЕНЕНИЕ СОЗДАННОГО ОБЩЕГО (ПОЛУ)СТЕПЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА МАКРОЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ОБЩИХ ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ЖЁСТКОСТИ, ОПТИКИ, ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ СПЛОШНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, В ЧАСТНОСТИ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЛЛЮМИНАТОРОВ ДЛЯ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ

### 4.1. Создание общих теорий жёсткости, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений

Для определения предельной поверхности при сложном напряжённом состоянии именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из неорганического стекла по известным результатам опытов при одноосных растяжении и сжатии представляется оправданным начать с известных критериев предельных состояний, в частности с критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева [123, 151]

$$(4.1)$$

$$\sigma_e = (1 - \chi)\sigma_1 + 2^{-1/2}\chi[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t,$$

где  $\sigma_e$  – равносильное (эквивалентное) напряжение в рассматриваемой точке тела;

$\chi$  – доля пластичности материала тела, при условии  $\sigma_1 \leq \sigma_c$

$$\chi = \sigma_t / \sigma_c;$$

$1 - \chi$  – доля хрупкости материала тела;

$\sigma_t, \sigma_c > 0$  – пределы прочности материала тела при одноосных растяжении и сжатии;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения в рассматриваемой точке, причём  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Для хрупких материалов, в частности неорганического стекла, также могут быть использованы первая теория прочности [69, 123, 151], необходимо для определения опаснейшей точки равносильно преобразованная автором к виду с равносильным (эквивалентным) напряжением и единой базой сравнения

$$(4.2)$$

$$\sigma_e = \max\{\sigma_1; -\chi\sigma_3\} = \sigma_t,$$

и критерий Кулона–Мора [69, 123, 151]

$$(4.3)$$

$$\sigma_e = \sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_t.$$

Отметим, что для стекла К8  $\chi = 0.0207 \ll 1$ , однако пренебречь этой величиной нельзя.

Кроме того, табл. 1.1 даёт представление о кратковременной прочности. Можно ожидать, что для длительных испытаний величины окажутся примерно вдвое меньшими [96].

Применение критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева и критерия Кулона–Мора

Рассмотрим вначале применение критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева (4.1).

В связи с тем, что для неорганического стекла  $1 - \chi \gg \chi$ ,

расчёты по формулам (2.53) и (2.55) показывают, что максимум  $\sigma_{e\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  должен иметь место в ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, то есть при

$$0 \leq r \leq a_1, z = 0,$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 145/244

где радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения максимальны, а осевое напряжение  $\sigma_z(r, z) = 0$ .

Подстановка в формулу для равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$  формул для радиального  $\sigma_r(r, 0)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, 0)$  и осевого  $\sigma_z(r, 0) = 0$  напряжений в ненагруженной центральной части внутреннего основания согласно формулам (2.53) убеждает, что при отсутствии бокового давления  $p_1 = 0$

равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  максимально в точке  $(0, 0)$ , в которой радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения максимальны и равны между собой, а при отсутствии давления  $p_1$  на боковую поверхность ещё и положительны:

$$\sigma_r(r, z) = \sigma_t(r, z) > 0.$$

Поэтому существует такое значение

$$\Pi_0 = -1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)$$

отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ , что при  $\Pi = \Pi_0$

в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части внутреннего основания максимальные в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, и равные между собой радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения аннулируются:  $\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0) = 0$ .

При условии отсутствия растягивающих радиального  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  напряжений

$$(4.4)$$

$$\Pi = p_1/p \geq -1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1) = \Pi_0$$

имеет место формула

$$\sigma_e^2/(\chi p)^2 = (A_1 - \Pi)^2 - (A_1 - \Pi)(A_2 + A_3)R + (A_2^2 - A_2A_3 + A_3^2)R^2,$$

где

$$A_1 = -1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1) = \Pi_0;$$

$$A_2 = (3/8)(3 + \mu) + (1/2)mh^2(a^4 - 2a_1^4)/[a^2a_1^2(a^2 - a_1^2)];$$

$$A_3 = (3/8)(1 + 3\mu) + (1/2)(1 + m)\mu a^2/(a^2 - a_1^2);$$

$$R = r^2/h^2.$$

При этом в ненагруженной центральной части внутреннего основания алгебраически наибольшим из всех трёх главных оказывается нулевое осевое напряжение:

$$\sigma_1 = \sigma_z(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq a_1).$$

Следовательно, внутри отрезка  $0 \leq R \leq a_1^2/h^2$  может быть лишь минимум равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, 0)$ , максимум же – только на концах отрезка. При этом

$$\sigma_e^2(a_1 - 0, 0)/(\chi p)^2 - \sigma_e^2(0, 0)/(\chi p)^2 = - (A_1 - \Pi)(A_2 + A_3)a_1^2/h^2 + (A_2^2 - A_2A_3 + A_3^2)a_1^4/h^4 > 0,$$

поскольку

$$A_2^2 - A_2A_3 + A_3^2 = (A_2 - A_3/2)^2 + (3/4)A_3^2 \geq 0$$

и аннулируется лишь при  $A_2 = A_3 = 0$ , что в данном случае исключается.

Следует также учесть принятое условие (4.4) и положительность не только  $A_3$ , но и  $A_2$ . Ведь  $A_2 \leq 0$  при  $a - a_1 \ll a_1$ , что не имеет места для иллюминаторов для высоких давлений, а по коллокационному методу минимизации невязок сопряжения всегда  $A_2 > 0$ .

Таким образом, показано, что при условии (4.4) равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим на краю ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{e\max} = \sigma_e(a_1 - 0, 0).$$

Последнее соотношение тем более справедливо, что в соответствии с результатами расчётов по методу конечных элементов, подтвердившими правильность аналитического определения величины  $\tau_{\max}$ , но показавшими смещение точки этого максимума  $\tau_{\max}$  сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  от срединной плоскости в сторону точки  $(a_1 - 0, 0)$ , в этой точке надо учесть сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 146/244

Уже вблизи этой точки в связи со скачком осевого напряжения  $\sigma_z(r, 0)$  действует сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$  близкой к  $\tau_{\max}$  величины, причём зона подобного возмущения сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  резко сосредоточена вблизи точки  $(a_1, 0)$ .

Поэтому представляется целесообразным и оправданным считать, что в этой точке действует сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$  величиной  $\tau_{\max}$ .

Тогда согласно [123, 151, 164, 166]

$$\sigma_r(a_1 - 0, 0) = (1/2) \{ \sigma_r(a_1, 0) + [\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2} \}$$

и

$$\sigma_e(a_1 - 0, 0) = (1 - \chi)/2 \{ \sigma_r(a_1, 0) + [\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2} \} + \chi [\sigma_r^2(a_1, 0) - \sigma_r(a_1, 0)\sigma_t(a_1, 0) + \sigma_t^2(a_1, 0) + 3\tau_{\max}^2]^{1/2}. \quad (4.5)$$

При  $\Pi \leq \Pi_0$  (см. формулу (4.4)) в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания равносильное (эквивалентное) напряжение

$$(4.6)$$

$$\sigma_e(0, 0) = (1 - \chi)\sigma_r(0, 0) + \chi\sigma_t(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0).$$

При  $\Pi \geq \Pi_0$  (см. формулу (4.4)) в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания равносильное (эквивалентное) напряжение

$$\sigma_e(0, 0) = (1 - \chi)\sigma_z(0, 0) + \chi|\sigma_r(0, 0)| = -\chi\sigma_r(0, 0) = -\chi\sigma_t(0, 0).$$

Как уже отмечалось выше, при  $\Pi = 0$  равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим в центре  $(0, 0)$  и строго превышает своё значение на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(0, 0) > \sigma_e(a_1 - 0, 0).$$

А при  $\Pi \geq \Pi_0$  равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим на краю  $(a_1 - 0, 0)$  и строго превышает своё значение в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) > \sigma_e(0, 0).$$

Поэтому ввиду непрерывности изменения разности частей последнего неравенства существует такое значение  $\Pi_e$  отношения  $\Pi$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = \Pi_e \quad (0 < \Pi_e < \Pi_0),$$

что при

$$\Pi = \Pi_e$$

равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим и в центре  $(0, 0)$ , и на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания, так что достигается равенство обоих этих значений между собой:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_e(a_1 - 0, 0).$$

При этом оказывается, что при

$$0 \leq \Pi < \Pi_e$$

равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим в центре  $(0, 0)$  и строго превышает своё значение на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(0, 0) > \sigma_e(a_1 - 0, 0),$$

а при  $\Pi > \Pi_e$  равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим на краю  $(a_1 - 0, 0)$  и строго превышает своё значение в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) > \sigma_e(0, 0).$$

Фактическое определение такого значения  $\Pi_e$  отношения  $\Pi$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  выполняется путём приравнивания значений равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  в центре  $(0, 0)$  и на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_e(0, 0) = \sigma_e(a_1 - 0, 0).$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 147/244

Попытка точного решения соответствующего уравнения четвёртой степени относительно  $\Pi$  приводит к слишком сложной для практических приложений формуле.

Поскольку формулы (2.53) являются приближёнными, представляется логичным следующее упрощение. Заменим в формуле (4.5) второй радикал

$$[\sigma_r^2(a_1, 0) - \sigma_r(a_1, 0)\sigma_t(a_1, 0) + \sigma_t^2(a_1, 0) + 3\tau_{\max}^2]^{1/2}$$

на первый радикал

$$[\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2},$$

воспользовавшись близостью значений  $\sigma_r(a_1, 0)$  и  $\sigma_t(a_1, 0)$ , которая следует из расчётов по общему (полу)степенному методу и по методу конечных элементов, и имея в виду, что

$$\sigma_r^2(a_1, 0) - \sigma_r(a_1, 0)\sigma_t(a_1, 0) + \sigma_t^2(a_1, 0) + 3\tau_{\max}^2 = \sigma_r(a_1, 0)\sigma_t(a_1, 0) + [\sigma_r(a_1, 0) - \sigma_t(a_1, 0)]^2 + 3\tau_{\max}^2 \approx \sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2,$$

тем более что первый радикал берётся с коэффициентом  $(1 - \chi)/2$ , второй радикал берётся с коэффициентом  $\chi$ , а для неорганического стекла

$$\chi \ll (1 - \chi)/2.$$

Тогда взамен формулы (4.5) получаем на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания равносильное (эквивалентное) напряжение

$$(4.7)$$

$$\sigma_c(a_1 - 0, 0) = (1 - \chi)/2 \sigma_r(a_1, 0) + (1 + \chi)/2 [\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2}.$$

Расчёты показывают, что неточность в определении равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_c(a_1 - 0, 0)$  на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания по формуле (4.7) взамен формулы (4.5) не превышает долей процента, зато приводит к резкому упрощению.

К такому же результату (4.7), но уже точному, ведёт критерий Кулона–Мора (4.3).

Приравнявая (4.6) и (4.7), получаем для указанного переходного значения  $\Pi_c$  отношения  $\Pi$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  формулу

$$(4.8)$$

$$\Pi_c = [\sigma_r^2(0, 0) - (1 - \chi)\sigma_r(0, 0)\sigma_r(a_1, 0) - \chi\sigma_r^2(a_1, 0) - (1 + \chi)^2\tau_{\max}^2] / \{(1 + \chi)p[\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0)]\} |_{\Pi=0}.$$

То есть в правой части формулы (4.8) все соответствующие значения радиального напряжения  $\sigma_r(r, z)$  берутся по соответствующим формулам (2.53) при условии  $\Pi = 0$ , или, равносильно, при условии  $p_1 = 0$ .

Превышение этого переходного значения  $\Pi_c$  (4.8) отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  соответствует скачкообразному переходу места наибольшего  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле (светопрозрачном элементе) из неорганического стекла из центра  $(0, 0)$  на край  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания. При  $\Pi = \Pi_c$  напряжённые состояния в обеих точках  $(0, 0)$  и  $(a_1 - 0, 0)$  равноопасны. При  $0 \leq \Pi < \Pi_c$  следует ожидать зарождения разрушения в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

При  $\Pi > \Pi_c$  следует ожидать зарождения разрушения на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Нетрудно видеть, что максимум  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_c(r, z)$

$$\sigma_{\max} = \max\{\sigma_c(0, 0), \sigma_c(a_1 - 0, 0)\}$$

убывает, а являющееся целевой функцией при прочностной оптимизации иллюминатора для высоких давлений давление разрушения

$$(4.9)$$

$$p_u = r\sigma_t/\sigma_{\max} = r\sigma_t/\max\{\sigma_c(0, 0), \sigma_c(a_1 - 0, 0)\}$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, возрастает ввиду формулы (4.6) на начальном этапе возрастания  $\Pi$  (от 0 до  $\Pi_c$ ).

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 148/244

В связи с ограниченностью берущегося по абсолютной величине, то есть положительным, предела прочности  $\sigma_c$  при одноосном сжатии должно существовать наилучшее значение  $\Pi = \Pi_{\max}$  отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ , обеспечивающее минимум максимума  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_c(r, z)$  и максимум давления разрушения  $p_u$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Из предыдущего ясно, что

$$\Pi_{\max} \geq \Pi_c.$$

При последнем условии имеет место для максимума  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_c(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, формула

$$\sigma_{\max} = \max\{\sigma_c(0, 0), \sigma_c(a_1 - 0, 0)\} = \sigma_c(a_1 - 0, 0).$$

Вновь оказывается рациональной замена второго радикала в формуле (4.5) первым радикалом с последующим анализом формулы (4.7).

Дифференцирование формулы (4.7) по  $\sigma_r(a_1, 0)$  приводит к единственному критическому значению

$$\sigma_r(a_1, 0) = - (1 - \chi)\chi^{-1/2}\tau_{\max},$$

обеспечивающему искомый экстремум максимума  $\sigma_c(a_1 - 0, 0)$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_c(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе.

Отсюда следует наилучшее значение  $\Pi = \Pi_{\max}$  отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ , обеспечивающее минимум максимума  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_c(r, z)$  и максимум давления разрушения  $p_u$  существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$(4.10)$$

$$\Pi_{\max} = (3/4)(1 - \chi)\chi^{-1/2}a_1/h + p^{-1}\sigma_r(a_1, 0)|_{\Pi=0} = (3/4)(1 - \chi)\chi^{-1/2}a_1/h - 1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) - (3/4)(1 + \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1) - (1/2)m(a^4 - 2a_1^4)/[a^2(a^2 - a_1^2)].$$

Если и только если выполняется условие

$$\chi(1/p)\sigma_r(0, 0)|_{\Pi=0} - (1 - \chi)/2 (1/p)\sigma_r(a_1, 0)|_{\Pi=0} - 1 - \chi\mu/2 \geq 0,$$

то дополнительно существует и второе критическое значение

$$\Pi_{c2} = \{s_{ra1}^2 + (9/4)a_1^2/h^2 - [2\chi/(1 + \chi) s_{r0} - (1 - \chi)/(1 + \chi) s_{ra1} - (2 + \chi\mu)/(1 + \chi)]^2\}/[4\chi/(1 + \chi) (s_{r0} + s_{ra1}) - (4 + 2\chi\mu)/(1 + \chi)]$$

$$(s_{r0} = - 1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1);$$

$$s_{ra1} = - 1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) - (3/4)(1 + \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (a_1^4 - a^4/2)/(a^2(a^2 - a_1^2)) m)$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{\max}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит с края  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания в центр  $(0, h)$  полностью нагруженного внешнего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$\sigma_{\max} = \sigma_c(0, h) = \chi\sigma_r(0, 0) - p(1 + \chi\mu/2) + 2\chi p_1.$$

Применение первой теории прочности, необходимо для определения опаснейшей точки равносильно преобразованной автором к виду с равносильным (эквивалентным) напряжением и единой базой сравнения

Результаты применения первой теории прочности (4.2), необходимо для определения опаснейшей точки равносильно преобразованной автором к виду с равносильным (эквивалентным) напряжением и единой базой сравнения и приводящей к упрощению выкладок, таковы. При отсутствии превышения переходного значения  $\Pi = \Pi_c$  отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$(4.11)$$

$$0 \leq \Pi \leq \Pi_e = p^{-1} \{ \sigma_r(0, 0) |_{\Pi=0} - \tau_{\max}^2 / [ \sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0) ] \}$$

максимум  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, имеет место в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания:

$$(4.12)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0).$$

При значениях отношения  $\Pi = r_1/p$  бокового давления  $r_1$  к внешнему давлению  $p$  между переходным  $\Pi_e$  и наилучшим  $\Pi_{\max}$  значениями в обоих случаях включительно

$$\Pi_e \leq \Pi \leq \Pi_{\max}$$

максимум  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, имеет место на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$(4.13)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) = (1/2) \{ \sigma_r(a_1, 0) + [ \sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2 ]^{1/2} \}.$$

Максимум  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$

$$\sigma_{\max} = \max \{ \sigma_e(0, 0), \sigma_e(a_1 - 0, 0) \}$$

убывает, а являющееся целевой функцией при прочностной оптимизации давление разрушения

$$p_u = r\sigma_t/\sigma_{\max} = r\sigma_t/\max \{ \sigma_e(0, 0), \sigma_e(a_1 - 0, 0) \}$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, возрастает при росте отношения  $\Pi = r_1/p$  бокового давления  $r_1$  к внешнему давлению  $p$  между нулём и наилучшим значением  $\Pi_{\max}$  в обоих случаях включительно

$$0 \leq \Pi \leq \Pi_{\max}.$$

Наибольшее давление разрушения

$$(4.14)$$

$$p_{u\max} = r\sigma_t/\sigma_{\max}|_{\Pi=\Pi_{\max}} = r\sigma_t/\max \{ \sigma_e(0, 0), \sigma_e(a_1 - 0, 0) \}|_{\Pi=\Pi_{\max}} = r\sigma_t/\sigma_e(a_1 - 0, 0)|_{\Pi=\Pi_{\max}} = 2r\sigma_t/\{ \sigma_r(a_1, 0) + [ \sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2 ]^{1/2} \}|_{\Pi=\Pi_{\max}}$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, достигается при наилучшем значении  $\Pi_{\max}$  отношения  $\Pi = r_1/p$  бокового давления  $r_1$  к внешнему давлению  $p$ .

Если отношение

$$\Pi = r_1/p$$

бокового давления  $r_1$  к внешнему давлению  $p$  не меньше наилучшего значения  $\Pi_{\max}$

$$\Pi \geq \Pi_{\max},$$

то максимум  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, имеет место в центре  $(0, h)$  нагруженного внешнего основания:

$$(4.15)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(0, h) = \chi [ \sigma_r(0, 0) - (1/2)\mu p + 2r_1 ].$$

Отметим следующие обстоятельства.

Формула в (4.11) для переходного значения  $\Pi_e$  отношения

$$\Pi = r_1/p$$

бокового давления  $r_1$  к внешнему давлению  $p$  является точной.

Точная формула для наилучшего значения  $\Pi_{\max}$  отношения

$$\Pi = r_1/p$$

бокового давления  $r_1$  к внешнему давлению  $p$  имеет вид

$$(4.16)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 150/244

$$P_{\max} = (1/2)(1 + \chi)^{-1} p^{-1} \{ \sigma_r(a_1, 0) + (1 + 2\chi)\sigma_r(0, h) + [(\sigma_r(a_1, 0) + (1 + 2\chi)\sigma_r(0, h))^2 + 4(1 + \chi)\chi^{-1}\tau_{\max}^2 - \sigma_r(a_1, 0)\sigma_r(0, h) - \chi\sigma_r^2(0, h)]^{1/2} \}.$$

Но расчёты показывают, что наилучшее значение  $P_{\max}$  отношения

$$P = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  по точной формуле (4.16) выражается с погрешностью порядка 1 % простой приближённой формулой

$$(4.17)$$

$$P_{\max} = (57/80)\chi^{-1/2}a_1/h.$$

Расхождение переходного значения  $P_e$  по формулам (4.8) и (4.11) и расхождение наилучшего значения  $P_{\max}$  по формулам (4.10) и (4.16) или (4.17) не слишком значительны, особенно это относится к переходному значению  $P_e$  отношения

$$P = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ .

Однако наилучшее значение  $P_{\max}$  отношения

$$P = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  по формулам (4.16) или (4.17) к тому же является вторым критическим значением  $P_{e2}$  в смысле скачкообразного перехода места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, из неорганического стекла с края  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания в центр  $(0, h)$  полностью нагруженного равномерным давлением  $p$  внешнего основания, а не в смысле обеспечения того минимума прежнего максимума  $\sigma_e(a_1 - 0, 0)$  равносильного (эквивалентного) напряжения (на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания), который достигается при большем и уже не играющем роли значении отношения

$$P = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ .

Впрочем, правомерность использования первой теории прочности (4.2) при таких напряжённых состояниях, когда именно сжимающее первое главное напряжение  $\sigma_1$  сопоставимо по величине с третьим главным напряжением  $\sigma_3$ , представляется сомнительной. По-видимому, критерий Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева (4.1) и критерий Кулона–Мора (4.3) приводят к более достоверным результатам.

Итак, применение созданного общего (полу)степенного метода даёт возможность предсказывать характер разрушения (по месту наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения) и давление разрушения (4.9) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) при любом значении отношения

$$P = p_1/p,$$

а также отыскивать переходные и экстремальные значения этого отношения.

Отметим, что при

$$0 \leq P < P_e,$$

когда равносильное (эквивалентное) напряжение максимально в точке  $(0, 0)$ , разрушение должно носить обычный для изгибаемых круглых пластин характер радиального растрескивания с зарождением (иницированием) в этой точке.

Если же

$$P > P_e$$

и равносильное (эквивалентное) напряжение максимально в точке  $(a_1 - 0, 0)$ , то представляет интерес предсказание направления развития первой трещины в начальный момент разрушения.

Если на основании представлений о разрушении хрупких материалов, в частности неорганического стекла, считать нормаль к поверхности первой трещины в точке  $(a_1 - 0, 0)$  её зарождения (иницирования) параллельной направлению алгебраически наибольшего

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 151/244

главного напряжения  $\sigma_1$ , то оказывается, что первая трещина должна выходить из этой точки под углом к отрицательному направлению оси  $r$

$$(4.18)$$

$$\alpha = (1/2)\arctg[2\tau_{\max}/\sigma_r(a_1, 0)]$$

(аргумент и сам арктангенс отрицательны, при этом положительным, как обычно [151], считается поворот против часовой стрелки).

Иными словами, первая трещина должна быть направлена к оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, откалывая сегмент над центральной частью частично нагруженного внутреннего основания примерно по сферической поверхности, вписанной с соприкосновением по краю этой центральной части в коническую поверхность, вершина которой направлена в сторону внешнего основания, а образующая наклонена к основанию конуса под углом минус  $\alpha$ .

Геометрическая интерпретация результатов расчёта давления разрушения, величины и направления максимального напряжения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, по созданному общему (полу)степенному методу при использовании однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок показана на рис. 4.1 для стекла К8, произвольных значений отношения  $\Pi = r_1/r$  и при

$$h:a_1:a = 2:1:(11/6)$$

(что соответствует размерам светопрозрачного элемента  $h = 60$  мм;  $a = 55$  мм;  $a_1 = 30$  мм).

При этом ввиду нарушения условия второе критическое значение  $\Pi_{e2}$  по критерию (4.1) не существует. Нетрудно видеть, что по критериям предельных состояний (4.1) и (4.3) при

$$0 \leq \Pi \leq \Pi_e = 0.338$$

давление разрушения  $r_u$  вначале медленнее, а затем быстрее возрастает с 42.0 до 82.3 МПа, при этом должна образовываться система радиальных трещин с зарождением в центре частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

При переходном значении отношения

$$\Pi = \Pi_e = 0.338$$

место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения скачком переходит из центра на край центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

При

$$\Pi > \Pi_e = 0.338$$

угол откола минус  $\alpha$  уменьшается с  $45^\circ$  вначале быстро, затем медленнее и составляет  $8^\circ$  при

$$\Pi = 3.$$

Разрушающее давление  $r_u$  растёт гораздо медленнее, чем на предыдущем участке  $0 \leq \Pi \leq \Pi_e = 0.338$ , и составляет 255 МПа при

$$\Pi = 2,$$

далее оно растёт ещё медленнее, при

$$\Pi = \Pi_{\max} = 2.83$$

достигая максимума, равного 272 МПа, после чего медленно убывает (менее чем на 1 МПа при

$$\Pi = 3).$$

По первой теории прочности (4.2) при

$$0 \leq \Pi \leq 0.338,$$

то есть на соответствующем критериям (4.1) и (4.3) отрезке, результаты ввиду формул (4.6) и (4.12) тождественны предыдущим, значение

$$\Pi = \Pi_e = 0.354$$

лишь менее чем на 5 % превышает предыдущее 0.338 по критериям (4.1) и (4.3), в очень небольших пределах до



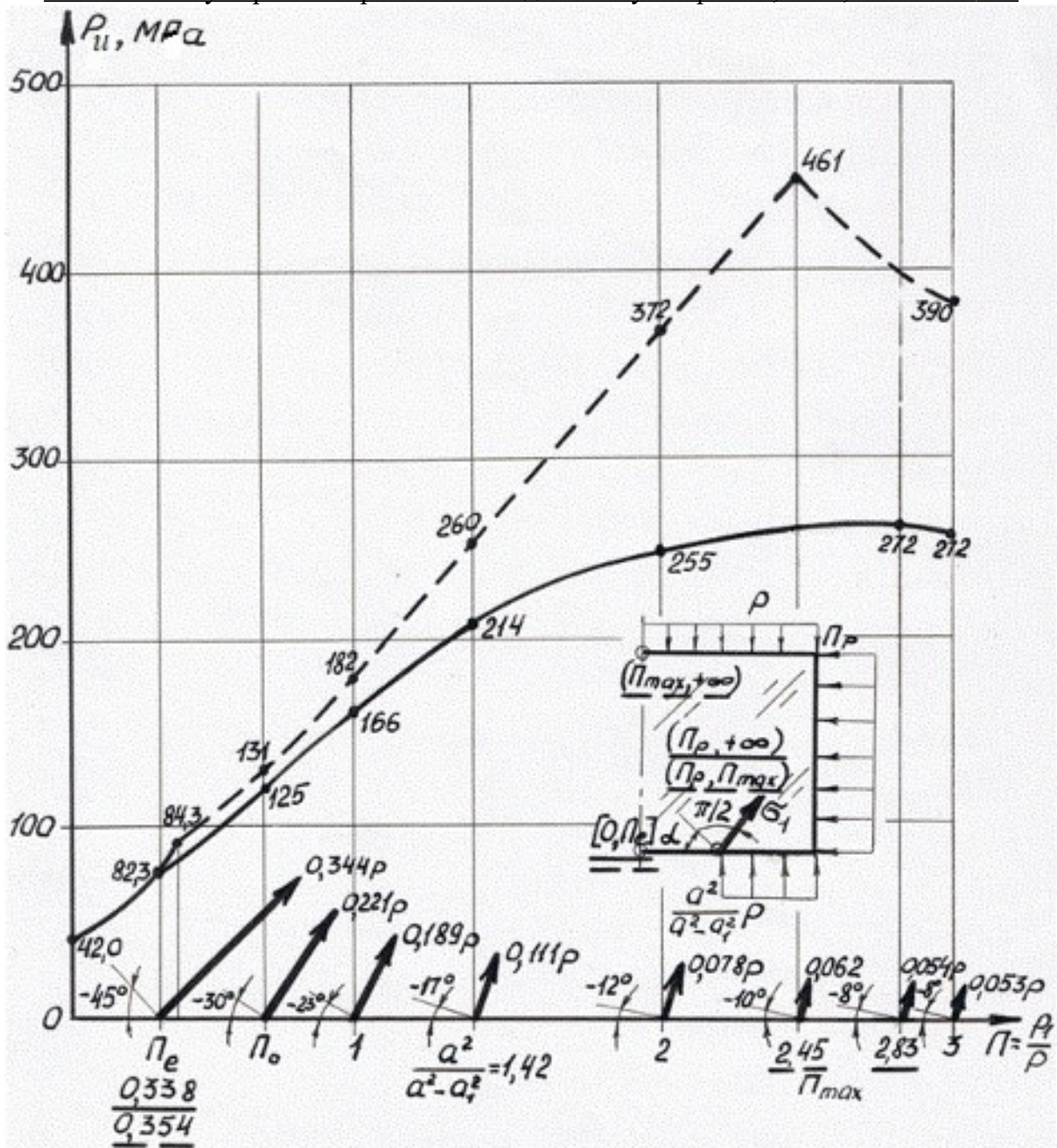


Рисунок 4.1. Влияние относительной (к внешнему давлению  $p$ ) величины  $\Pi = p_1/p$  давления  $p_1$ , приложенного к боковой поверхности нагруженного по схеме с повышенным равномерным периферическим противодействием именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из неорганического стекла К8 с соотношением размеров  $h:a_1:a = 2:1:(11/6)$ , на величину и ориентацию разрушающего главного напряжения  $\sigma_1$  и на вероятный угол  $\alpha$  скалывания далее растрескиваемого сегмента у края центральной части частично нагруженного основания, на положение (кружок в центре или на краю центральной части этого основания) места максимума равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{\text{max}}$  в теле (элементе) и на давление его разрушения  $p_u$  согласно первой теории прочности (толстая штриховая линия) и критериям Кулона–Мора и Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева (толстая сплошная линия).

$$\Pi = \Pi_c = 0.354$$

закономерности первого участка  $0 \leq \Pi \leq 0.338$  изменения  $\Pi$  сохраняются.

Затем место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения таким же скачком переходит в точку  $(a_1 - 0, 0)$ , меняя характер разрушения.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 153/244

Углы откола те же, что и выше, а давление разрушения  $p_u$  растёт хотя и медленнее, чем в конце первого участка, но быстрее, чем по критериям (4.1) и (4.3) (расхождение малосущественно – в пределах до 10 % – при

$$\Pi \leq 1,$$

далее резко возрастает).

Давление разрушения  $p_u$  растёт с учётом формулы (4.13) почти линейно до 461 МПа при

$$\Pi = \Pi_{\max} = 2.45,$$

затем резко убывает по гиперболическому закону с учётом формулы (4.14) до 390 МПа при

$$\Pi = 3.$$

Максимум давления разрушения  $p_u$  оказывается уже резким, и  $\Pi_{\max} = \Pi_{c2}$  есть и второе критическое значение отношения  $\Pi$ , которое соответствует скачкообразному переходу места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения из точки  $(a_1 - 0, 0)$  в точку  $(0, h)$ .

Дальнейшее увеличение отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  ведёт к убыванию давления разрушения  $p_u$  и не имеет практического смысла.

Представляет интерес выяснить, как соотносятся описанные выше представления о разрушении именно существенно трёхмерных сплошных светопрозрачных элементов из неорганического стекла и результаты испытаний, проведённых в лаборатории прочности Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина.

При отсутствии бокового давления

$$(p_1 = 0, \Pi = 0)$$

испытывался трёхмерный светопрозрачный элемент из неорганического стекла К8 размерами  $h = 45$  мм,  $a_1 = 30$  мм,  $a = 50$  мм.

Он разрушился при

$$p_u = 30 \text{ МПа}$$

(расчётное давление разрушения  $p_u$  составляет 29.0; 30.4; 33.0 МПа соответственно по созданному общему (полу)степенному методу при использовании однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения по методам минимизации среднеквадратично, минимаксами модулей и коллокационно) с образованием системы трещин, близких к радиальным, и с зарождением их вблизи центра свободной от давления центральной части частично нагруженного основания.

Эксперименты со светопрозрачными элементами из неорганического стекла К8 размерами

$$h = 60 \text{ мм}, a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}$$

при

$$p_1 = p,$$

то есть

$$\Pi = 1,$$

при любых конструкциях иллюминаторов и программах нагружения неизменно приводили к скалыванию и последующему растрескиванию сегмента, меньшего полусферы, основанием которого является ненагруженная центральная часть частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента. При этом угол откола ненагруженного светового участка составлял примерно 25...30° с изменением в окружном направлении (расчётное значение 23° по формуле (4.17)), а давления разрушения  $p_u$  при одном или нескольких циклах нагружения находились в промежутке 150...200 МПа (теоретические значения

$$p_u = 166 \text{ МПа}$$

по критерию Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева и критерию Кулона–Мора при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения и несколько выше при методе минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и при методе коллокационной минимизации невязок сопряжения и 182 МПа по первой теории прочности, см. рис. 4.1).

Таким образом, эксперименты подтверждают правильность представлений о прочности и разрушении, полученных с помощью критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева и критерия

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 154/244

Кулона–Мора на основе созданного общего (полу)степенного метода, а также их применимость, приемлемость и полезность для расчётов несущей способности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения с повышенным периферическим противодействием.

Следовательно, созданные общий (полу)степенной метод и теории деформирования, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного по схеме с повышенным равномерным периферическим противодействием, выдерживают не только аналитическую и численную, но и экспериментальную проверку.

Созданная по общему (полу)степенному аналитическому методу макроэлементов теория деформирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного по схеме с повышенным равномерным периферическим противодействием, позволяет наряду с теорией прочности создать и основы теории жёсткости именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, с выполнением совокупности условий:

(4.19)

$$u_z(a_1, 0) \leq [\Delta_{\text{раб}}];$$

(4.20)

$$u_r(a, z) \leq \Delta_r' + u_r(a + \Delta_r', z),$$

где

$[\Delta_{\text{раб}}]$  – допускаемая стрела прогиба светового участка внутренней оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;

$\Delta_r'$  – радиальный зазор между именно существенно трёхмерным сплошным цилиндрическим телом, в частности светопрозрачным элементом, и оправой;

$u_r(a + \Delta_r', z)$  – радиальные перемещения точек оправы в выбранной системе координат.

Другие, нетривиальные и специфические для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений, ограничения, накладываемые на перемещения, вытекают из расчётов влияния напряжённно-деформированного состояния тела (элемента) на оптические свойства иллюминатора.

## **4.2. Создание теории влияния на оптические свойства иллюминатора напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания, открытие, обоснование и обобщение шести основных явлений и законов такого напряжённно-деформированного состояния**

Расчёт габаритных характеристик изображения, которые обеспечиваются конкретной конструкцией иллюминатора в недеформированном состоянии его именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента, ведётся по методу [41] рассмотрения хода крайнего рабочего луча, однако с уточнением смысла расстояния  $\Delta'_0$  между светопрозрачным элементом и гидрообъективом и с учётом толщины  $h_f$  и выноса  $\Delta_f$  фланца внутренним радиусом  $(a - \Delta_f)$  (рис. 4.2).

Чтобы иллюминатор для высоких давлений искусственно не сужал поле зрения гидрообъектива (естественное сужение поля зрения в воде связано с различием показателей преломления воды  $n_w = 1.33$  и воздуха  $n_a = 1$  и является неизбежным [41]), должны выполняться условия:

(4.21)

$$a_1 \geq [a_1]_{\text{габ}} = a_{\text{об}} + \Delta'_0 \text{tg}\beta_a;$$
$$a \geq [a]_{\text{габ}} = a_{\text{об}} + \Delta'_0 \text{tg}\beta_a + \text{htg}\beta_g + h_f \text{tg}\beta_w + \Delta_f,$$

где

$[a_1]_{\text{габ}}$  – допускаемое по габаритным соображениям значение  $a_1$ ;

$a_{\text{об}}$  – световой радиус первой линзы;

$\Delta'_0$  – расстояние между сплошным трёхмерным цилиндрическим светопрозрачным элементом и краем светопрозрачного участка первой линзы гидрообъектива;

$\beta_a$  – угол между осью и крайним рабочим лучом в воздухе, равный половине угла поля зрения гидрообъектива в воздухе;

$[a]_{\text{габ}}$  – допускаемое по габаритным соображениям значение  $a$ ;

$\beta_g$  – угол между осью и крайним рабочим лучом в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом светопрозрачном элементе;

$\beta_w$  – угол между осью и крайним рабочим лучом в воде, равный половине угла поля зрения гидрообъектива в воде.

Ход крайнего рабочего луча через именно существенно трёхмерный сплошной цилиндрический светопрозрачный элемент, деформированный высоким гидростатическим давлением, оказывается зависящим от искривлений первоначально плоских оптических поверхностей светопрозрачного элемента. Предположено сохранение осевой симметрии иллюминатора для высоких давлений при деформировании.

Расстояние  $\Delta'_0$  по мере увеличения давления изменяется (в практически важных случаях уменьшается) и при давлении  $p$  становится равным  $\Delta'_p$ . Поскольку существенно именно взаимное положение сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента и гидрообъектива, то одну точку подводного аппарата можно фиксировать.

Выберем, как и прежде, в качестве такой точки центр частично нагруженной внутренней оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента, чтобы упростить использование формул (2.52) – (2.55), (2.52'), (2.54').

Отметим, что  $\Delta'_p$  зависит от  $\Delta'_0$  и от осевых перемещений не только именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента, но и всех других деталей корпуса, влияющих на взаимное положение светопрозрачного элемента и гидрообъектива.

Учтём изменение  $\Delta'_0$  и перемещения оптических поверхностей (см. рис. 4.2).

Условно принята неизменность расстояния края частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента от гидрообъектива, при этом

$$\Delta'_p = \Delta'_0 - u_z(a, 0) + u_z(R_0, 0),$$

$R_0$  – расстояние от оси сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента до точки пересечения крайнего рабочего луча с внутренним основанием светопрозрачного элемента, деформированного давлением  $p$ .

В общем случае расстояние  $R_0$  удовлетворяет условию

$$R_0 = a_{\text{об}} + [\Delta'_p + u_z(R_0, 0)] \text{tg}\beta_a.$$

Это уравнение четвёртой степени относительно  $R_0$  имеет вид, удобный для применения метода итераций.

Примем в качестве нулевого приближения для расстояния  $R_0$  величину

$$R_{00} = a_{\text{об}} + \Delta'_0 \text{tg}\beta_a.$$

Ограничимся первым приближением:

$$R_0 = R_{01} = a_{\text{об}} + [\Delta'_p + u_z(R_{00}, 0)] \text{tg}\beta_a = a_{\text{об}} + [\Delta'_p + u_z(a_{\text{об}} + \Delta'_0 \text{tg}\beta_a, 0)] \text{tg}\beta_a.$$

Угол между осью и нормалью к деформированной внутренней оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке  $r = R_0$  в связи с малостью приближённо можно считать равным своему тангенсу

$$\partial u_z(R_0, 0) / \partial r.$$

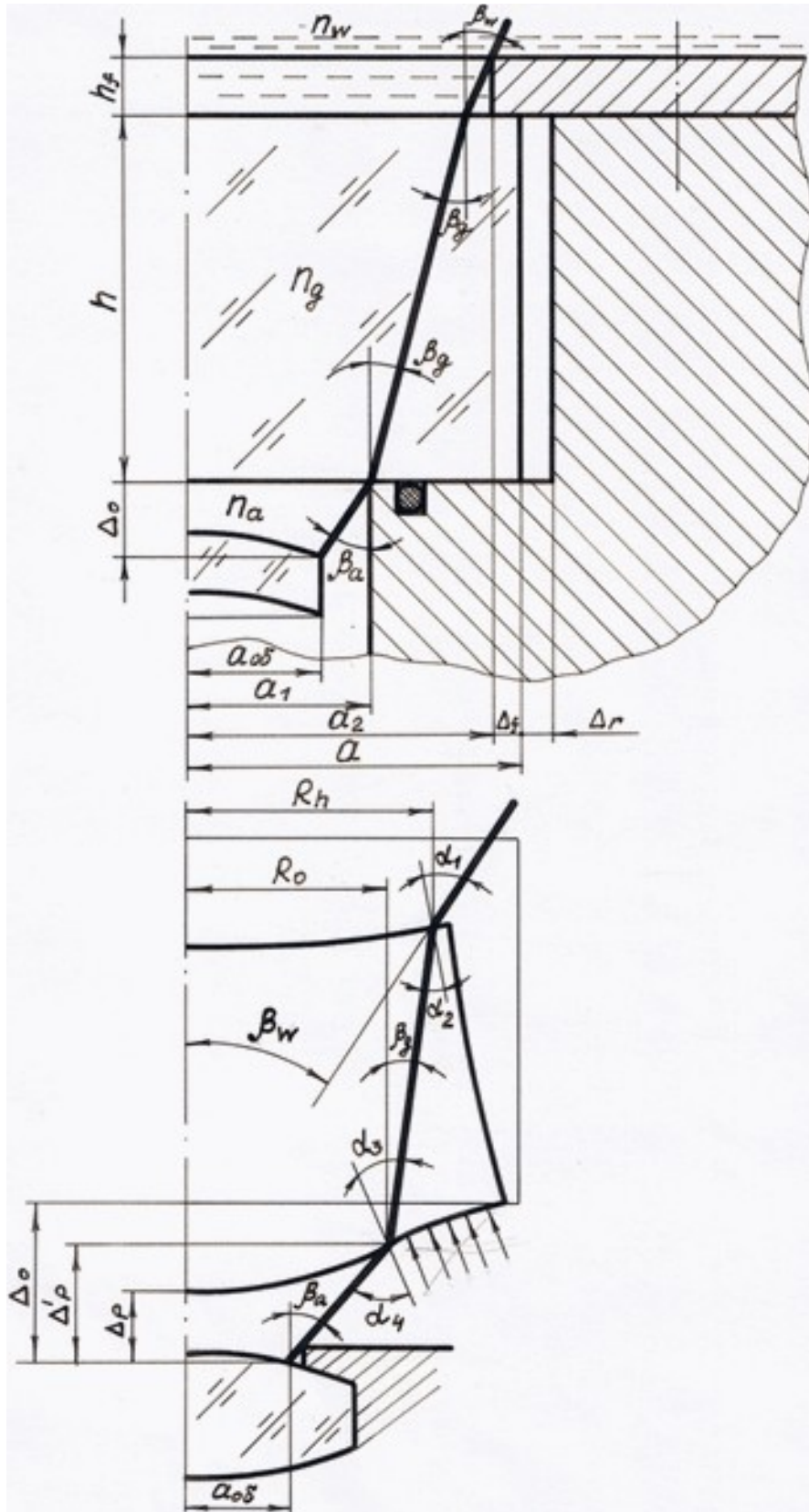


Рисунок 4.2. Ход крайнего рабочего луча в иллюминаторе без учёта (вверху) и с учётом (внизу) деформирования его именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 157/244

Поэтому угол падения крайнего рабочего луча на эту поверхность

$$\alpha_4 = \beta_a + \partial u_z(R_0, 0)/\partial r.$$

Тогда угол преломления по известному закону синусов [7, 138] составляет

$$\alpha_3 = \arcsin[(n_a/n_g)\sin\alpha_4],$$

где

$n_a$  – показатель преломления воздуха;

$n_g$  – показатель преломления материала именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента.

Преломлённый луч пересекает деформированную внешнюю оптическую поверхность светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси светопрозрачного элемента на расстояние

$$R_h = R_0 + [h - u_z(R_0, 0) + u_z(R_h, h)]\text{tg}[\alpha_3 - \partial u_z(R_0, 0)/\partial r],$$

причём подстановка нулевого приближения к  $R_h$

$$R_{h0} = R_0 + \text{htg}\alpha_3$$

даёт первое приближение к  $R_h$ , которым и ограничимся:

$$R_h = R_{h1} = R_0 + [h - u_z(R_0, 0) + u_z(R_0 + \text{htg}\alpha_3, h)]\text{tg}[\alpha_3 - \partial u_z(R_0, 0)/\partial r].$$

Угол падения крайнего рабочего луча в этой точке

$$\alpha_2 = \alpha_3 - \partial u_z(R_0, 0)/\partial r + \partial u_z(R_h, h)/\partial r,$$

угол преломления

$$\alpha_1 = \arcsin[(n_g/n_w)\sin\alpha_2],$$

где

$n_w$  – показатель преломления воды.

Используем радианную меру угла, при его малости примерно равную его синусу и тангенсу.

Крайний рабочий луч в воде образует с осью именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора угол

$$\beta_w = \alpha_1 - \partial u_z(R_h, h)/\partial r,$$

равный половине угла поля зрения гидрообъектива в воде при давлении  $p$ .

Анализ полученных зависимостей и сравнение их со случаем  $p = 0$  показывает, что деформирование именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента ведёт к приближению крайнего рабочего луча к оси.

В результате неравенства (4.21) усиливаются с ростом давления  $p$  и нет нужды в увеличении  $[a_1]_{\text{габ}}$  и  $[a]_{\text{габ}}$ .

Кроме того, деформирование именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента ведёт к дополнительному уменьшению угла поля зрения в воде.

Величина этого уменьшения мала для светопрозрачного элемента из органического стекла и совсем ничтожна для светопрозрачного элемента из неорганического стекла, но представляет интерес с принципиальной точки зрения.

Влияние деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента и на другие габаритные характеристики оптической системы [7, 41, 138], то есть на размеры и масштаб изображения, его освещённость и т. д., также невелико в случае светопрозрачного элемента из органического стекла и ничтожно в случае светопрозрачного элемента из неорганического стекла.

Другую группу оптических характеристик иллюминаторов для высоких давлений составляют абберационные [7, 41, 137, 138], определяющие искажение формы и ухудшение качества изображения.

Аналитическим расчётом хода рабочего луча через оптическую систему с именно существенно трёхмерным сплошным цилиндрическим светопрозрачным элементом иллюминатора в качестве первой линзы показано и численным методом по программе ОПАЛ Ленинградского института точной механики и оптики подтверждено, что влияние деформирования светопрозрачного элемента на габаритные (поле зрения, масштаб и освещённость изображения и др.) и абберационные (неизопланатизм; волновые, продольные

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 158/244

и поперечные аберрации; хроматизм увеличения; абсолютную и относительную дисторсии; аберрации широких наклонных пучков) характеристики оптической системы [7, 41, 137, 138] незначительно при выполнении светопрозрачного элемента из органического стекла и ничтожно при выполнении светопрозрачного элемента из неорганического стекла. Единственно существенна продольная расфокусировка оптической системы – приближение изображения к задней поверхности объектива.

То есть для оптической системы для высоких давлений, имеющей в качестве первой линзы деформированный именно существенно трёхмерный сплошной цилиндрический светопрозрачный элемент, оптические поверхности которого задавались полученными уравнениями

$$z_h(r) = h + u_z(r, h);$$
$$z_0(r) = u_z(r, 0)$$

с учётом (2.52) и (2.54), и гидрообъектив «Гидроруссар-8» [41], при давлении  $p = 98$  МПа Ленинградским институтом точной механики и оптики были вычислены аберрации осевого, внеосевого и широких наклонных пучков и сопоставлены с таковыми для случая недеформированного светопрозрачного элемента.

Установлено, что его деформирование приводит к дополнительным аберрациям, которые по сравнению с аберрациями, соответствующими недеформированному состоянию именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента, имеют тот же самый порядок в случае его выполнения из органического стекла и малы в случае светопрозрачного элемента из неорганического стекла.

Кроме того, деформирование именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора приводит к существенной в случае его выполнения из неорганического стекла и неприемлемой в случае светопрозрачного элемента из органического стекла продольной расфокусировке изображения, на величину которой оно приближается к задней поверхности гидрообъектива, снижая разрешающую способность оптической системы.

Поэтому представляется рациональным ограничиться аналитическим методом расчёта продольной расфокусировки изображения подводного объекта, связанной с искривлениями первоначально плоских оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента под действием высоких гидростатических давлений на океанских глубинах.

На рис. 4.3 показан ход параксиального (близкого к оптической оси) луча из точки  $S$  в точку  $S'_p$ , положение которой зависит от внешнего давления  $p$  и которая смещается от соответствующего  $p = 0$  положения  $S'_0$  на величину продольной расфокусировки  $\Delta x_p$  в сторону второй (задней) главной плоскости [41] гидрообъектива.

На этом же рисунке показана и первая (передняя) главная плоскость гидрообъектива, а знаки расставлены по правилам оптических расчётов [7].

По соображениям наглядности масштаб не соблюдается, расстояние  $s$  показано сравнительно малым, малые углы и искривления оптических поверхностей – многократно увеличенными.

На самом деле расстояние  $s$  на порядок-два превосходит величины  $h$ ,  $\Delta''_p$ ,  $s'_p$ , не говоря уже о перемещениях оптических поверхностей.

В связи с этим все обозначенные на рисунке 4.3 углы малы, их синусы и тангенсы могут считаться равными их радианному меру.

Рассматривать влияние перемещений оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента на величину  $s$  не имеет смысла.

Луч выходит из точки на оси под углом  $\beta$  к ней и пересекается с внешней оптической поверхностью именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_h = \beta s.$$

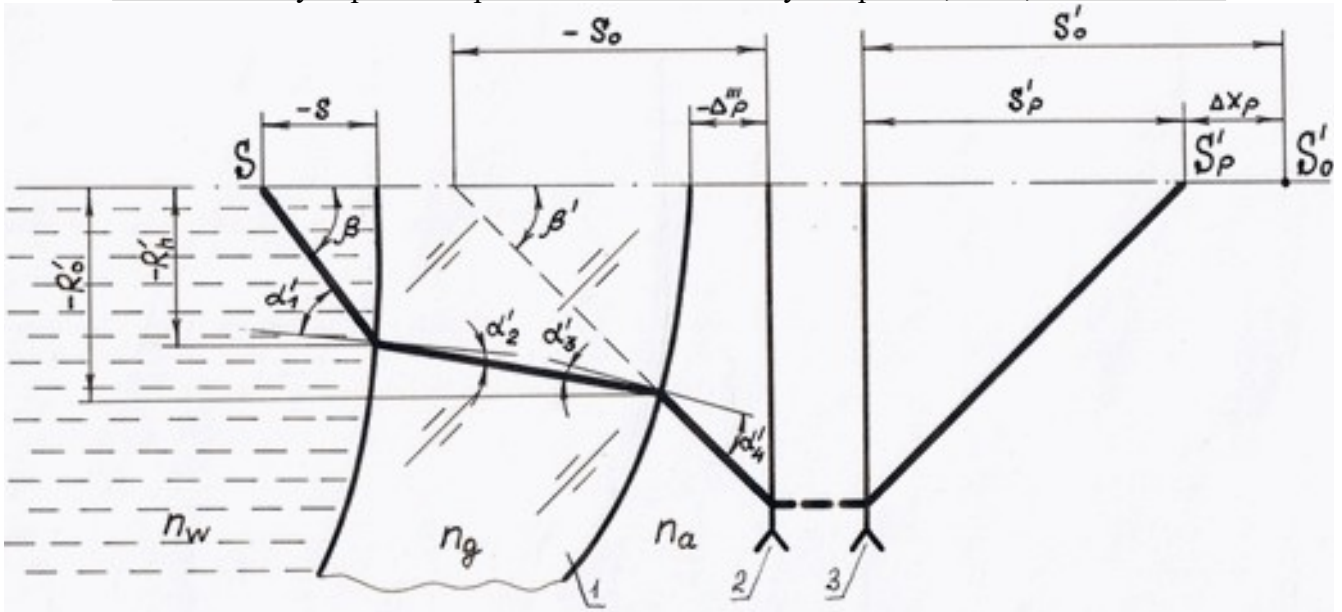


Рисунок 4.3. Приближение изображения  $S'_p$  объекта  $S$  к гидрообъективу на величину продольной расфокусировки  $\Delta x_p$ , обусловленное деформированием именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента при внешнем давлении  $p$ : 1 – светопрозрачный элемент; 2, 3 – передняя и задняя главные плоскости гидрообъектива соответственно.

Угол падения

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_z(\beta s, h)/\partial r.$$

Угол преломления

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\alpha'_1.$$

Луч пересекается с внутренней оптической поверхностью именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_0 = \beta s + [\alpha'_2 + \partial u_z(\beta s, h)/\partial r]h.$$

Угол падения

$$\alpha'_3 = \alpha'_2 + \partial u_z(\beta s, h)/\partial r - \partial u_z(R'_0, 0)/\partial r.$$

Угол преломления

$$\alpha'_4 = (n_g/n_a)\alpha'_3.$$

Угол отклонения преломлённого луча от оси

$$\beta' = \alpha'_4 + \partial u_z(R'_0, 0)/\partial r.$$

Удаление мнимой точки пересечения преломлённого луча с осью от первой (передней) главной плоскости гидрообъектива

$$s_0 = R'_0/\beta' + \Delta'''_p.$$

Тогда по формуле отрезков Гаусса [7, 138]

$$1/s_0 + 1/s'_p = 1/f'_0,$$

где  $f'_0$  – фокусное расстояние гидрообъектива в воздухе, определяются положение изображения

$$s'_p = f'_0 + f_0'^2/(s_0 - f'_0)$$

при давлении  $p$  и, в частности, при  $p = 0$ , а затем продольная расфокусировка

$$\Delta x_p = s'_0 - s'_p.$$

Если учесть, что для гидрообъективов обычно задаётся (для «Гидроруссара-8» равное 28.8 мм) фотограмметрическое фокусное расстояние в воде [41]

$$f_{\phi w}' = (n_w/n_a)f'_0,$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 160/244

и перейти к пределу при  $\beta \rightarrow 0$  с учётом действительных порядков линейных величин, то получается формула для продольной расфокусировки, в частности по общему (полу)степенному методу.

Сущность аналитического метода расчёта продольной расфокусировки изображения подводного объекта при использовании **двухпараметрического** ( $m, \delta$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине – заключается в следующем.

По формуле (2.52) для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h \left\{ \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 \frac{a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} \right] r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta \frac{(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} r^2/a_1^2 \right\};$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) = (p/E)h \left\{ 2\mu p_1/p - \frac{(1/2)(1+\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 \frac{a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} \right] r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta \frac{(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} r^2/a_1^2 - \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} r^2/a_1^2 \right\}.$$

Поскольку в обоих случаях единственной переменной является радиус  $r$ , присутствующий именно и только во второй и четвёртой степенях, то каждое из деформированных оснований именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, является частью обобщённого смешанного квадратно-биквадратного параболоида вращения с перпендикулярной оси касательной плоскостью и с соприкасающимся в вершине на касательной плоскости обычным квадратным параболоидом вращения. Так как образующие обоих параболоидов вращения имеют нулевые первые производные в их общей вершине, то кривизны образующих в этой вершине равны вторым производным осевых перемещений как функций для своих образующих в этой вершине.

Луч выходит из точки на оси под углом  $\beta$  к ней и пересекается с внешней оптической поверхностью  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_h = \beta s.$$

Угол падения

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r;$$

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 \frac{a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} \right] r/h - (3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2-a_1^2) rh/a_1^2 \right\};$$

при бесконечно малых  $\beta \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow 0$  можно пренебречь кубом  $r^3/h^3$  бесконечно малой  $r/h$ ;

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 \frac{a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} \right] r/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2-a_1^2) rh/a_1^2 \right\};$$

$$\partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 \frac{a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} \right] \beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2-a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\};$$

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r =$$

$$\beta - (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 \frac{a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} \right] \beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2-a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\}.$$

Угол преломления

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\alpha'_1;$$

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\beta - (n_w/n_g)(p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 \frac{a^2/(a^2-a_1^2)}{\ln(a/a_1)} \right] \beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2-a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\}.$$



Луч пересекается с внутренней оптической поверхностью  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_0 = \beta s + h\alpha'_2 + h\partial_{u_{z1}}(\beta s, h)/\partial r;$$

$$R'_0 = \beta s + (n_w/n_g)\beta h - (n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{s} + (p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{s} \right\} \right\};$$

$$R'_0 = \beta s + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{s} \right\}.$$

Угол падения

$$\alpha'_3 = \alpha'_2 + \partial_{u_{z1}}(\beta s, h)/\partial r - \partial_{u_{z1}}(R'_0, 0)/\partial r;$$

$$\partial_{u_{z1}}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r/h - (3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2}{s} \right\};$$

при бесконечно малых  $\beta \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow 0$  можно пренебречь кубом  $r^3/h^3$  бесконечно малой  $r/h$ ;

$$\partial_{u_{z1}}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} r \right\};$$

$$\partial_{u_{z1}}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h \pm \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} \left\{ \beta s + (n_w/n_g)\beta h + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{s} \right\} \right\} \right\};$$

$$p/E \ll 1;$$

$$\partial_{u_{z1}}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h \pm \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} \left\{ \beta s + (n_w/n_g)\beta h \right\} \right\};$$

$$s \gg h;$$

$$\partial_{u_{z1}}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h \pm \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} \beta s \right\};$$

$$\alpha'_3 = (n_w/n_g)\beta + (1 - n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{s} - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} \left\{ \beta s + (n_w/n_g)\beta h \right\} \right\} \right\};$$

$$h \ll s;$$

$$\alpha'_3 = (n_w/n_g)\beta + (1 - n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{s} - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} \beta s \right\} \right\}.$$

Угол преломления

$$\alpha'_4 = (n_g/n_a)\alpha'_3;$$

$$\alpha'_4 = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{s} - (n_g/n_a)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} \beta s \right\} \right\}.$$

Угол отклонения преломлённого луча от оси

$$\beta' = \alpha'_4 + \partial_{u_z}(R'_0, 0)/\partial r;$$

$$\beta' = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{s} - (n_g/n_a)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} \left\{ \beta s + (n_w/n_g)\beta h \right\} \right\} + (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} \left\{ \beta s + (n_w/n_g)\beta h \right\} \right\} \right\};$$

$$s \gg h;$$

$$\beta' = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{s} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{s} \beta s \right\} \right\}.$$

Удаление мнимой точки пересечения преломлённого луча с осью от первой (передней) главной плоскости гидрообъектива

$$s_0 = R'_0/\beta' + \Delta'''_p;$$

$$s_0 \gg \Delta'''_p;$$

$$s_0 = R'_0/\beta'; 1/s_0 = \beta'/R'_0;$$

$$1/s_0 = \left\langle (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2} \right\} \right\} / \left\langle \beta s + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2} \right\} \right\rangle ;$$

$$p \ll E;$$

$$1/s_0 = (n_w/n_a)/s + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} \right\} \right\};$$

$$s_0 = s_0(p) = s_0p;$$

$$1/s_{0p} = (n_w/n_a)/s + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} \right\} \right\};$$

$$1/s_{00} = (n_w/n_a)/s.$$

Тогда по формуле отрезков Гаусса [279]

$$1/s_{0p} + 1/s'_p = 1/f'_0;$$

$$1/s'_p = 1/f'_0 - 1/s_{0p} = (s_{0p} - f'_0)/(f'_0 s_{0p});$$

$$s'_p = (f'_0 s_{0p})/(s_{0p} - f'_0);$$

$$s'_p = f'_0 + f_0'^2/(s_{0p} - f'_0);$$

$$s'_0 = f'_0 + f_0'^2/(s_{00} - f'_0);$$

$$s'_0 - s'_p = f_0'^2/(s_{00} - f'_0) - f_0'^2/(s_{0p} - f'_0);$$

$$(s'_0 - s'_p)/f_0'^2 = 1/(s_{00} - f'_0) - 1/(s_{0p} - f'_0);$$

$$s_{0p} \gg f'_0.$$

Продольная расфокусировка изображения подводного объекта

$$\Delta x_p = s'_0 - s'_p = f_0'^2(1/s_{00} - 1/s_{0p});$$

$$\Delta x_p = - (n_g - n_w)/n_a f_0'^2(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} + (n_g/n_a - 1)f_0'^2(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} \right\} \right\};$$

для гидрообъектива обычно вместо фокусного расстояния  $f'_0$  в воздухе задаётся фотограмметрическое фокусное расстояние  $f_{\Phi w}$  в воде

$$f_{\Phi w}' = (n_w/n_a)f'_0;$$

$$f'_0 = (n_a/n_w)f_{\Phi w}';$$

$$(4.22)$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\Phi w}'^2/h n_a/n_w^2 \left\{ - (n_g - n_w) \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - 1/2 (1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} \right] + (n_g - n_a) \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} \right] \right\}.$$

А при отсутствии надобности сохранять связанные с происхождением этой формулы (4.22) именно обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$

$$[\ ]_0 = \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} \right];$$

$$[\ ]_h = \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - 1/2 (1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} \right],$$

позволяющие отдельно определить и учесть вклады искривлений сначала полностью нагруженного основания и затем частично нагруженного основания, можно с учётом сходства выражений в обеих квадратных скобках равносильно (эквивалентно) привести эту формулу (4.22) к более краткой итоговой формуле для продольной расфокусировки изображения подводного объекта

(4.23)

$$\Delta x_p = p/E f_{\text{фв}}^2/h n_a/n_w^2 \{ (n_g - n_w)(1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (n_w - n_a)[\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \}.$$

В формуле (4.22) в фигурных скобках произведение  $(- (n_g - n_w))$  на первую квадратную скобку обусловлено искривлением внешней оптической поверхности (полностью нагруженного основания) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора, а произведение  $(n_g - n_a)$  на вторую квадратную скобку обусловлено искривлением внутренней оптической поверхности (частично нагруженного основания) светопрозрачного элемента. Это показано выводом (происхождением, этиологией) этой формулы (4.22). Действительно, выше определены указанные частные производные осевых перемещений частично нагруженного основания  $z = 0$  и полностью нагруженного основания  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора по радиусу:

$$\begin{aligned} \partial u_{z1}(r, 0)/\partial r &= (p/E) \{ [(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r/h - \\ &\quad (3/4)(1 - \mu^2)r^3/h^3 + \delta(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2 \}; \\ \partial u_{z1}(r, h)/\partial r &= (p/E) \{ [(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r/h - \\ &\quad (3/4)(1 - \mu^2)r^3/h^3 + [\delta - (1/2)(1 - \mu)](1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2 \}. \end{aligned}$$

Для параксиального (близкого к оптической оси) луча являются бесконечно малыми угол  $\beta$  и соответствующий текущий радиус  $r$ :  $\beta \rightarrow 0, r \rightarrow 0$ .

При бесконечно малом отношении  $r/h$  можно пренебречь его кубом  $r^3/h^3$  в последних двух формулах:

$$\begin{aligned} \partial u_{z1}(r, 0)/\partial r|_{r \rightarrow 0} &= (p/E)r/h [\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \\ &\quad \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]; \\ \partial u_{z1}(r, h)/\partial r|_{r \rightarrow 0} &= (p/E)r/h [\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) \\ &\quad + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]. \end{aligned}$$

Последние две формулы как раз и содержат в обратном порядке обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (4.22) и показывают их происхождение и смысл.

Теперь устанавливаются указанные вершинные кривизны образующих для обоих параболоидов вращения, ввиду аннулирования первых производных равные вторым производным осевых перемещений как функций для этих образующих по радиусу для частично нагруженного основания  $z = 0$  и для полностью нагруженного основания  $z = h$  соответственно, и отношение этих кривизн в обратном порядке:

(4.24)

$$\begin{aligned} k_0 &= \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 = (p/E)/h [\ ]_0 = (p/E)/h [\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \\ &\quad \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]; \\ k_h &= \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (p/E)/h [\ ]_h = (p/E)/h [\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + \\ &\quad (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]; \\ k_h/k_0 &= [\ ]_h/[\ ]_0 = [\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \\ &\quad \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/[\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \\ &\quad \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]. \end{aligned}$$

И предпоследние две формулы как раз и содержат в обратном порядке обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (4.22) и показывают их происхождение и смысл.

Кроме того, обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (4.22) выражаются через соответствующие кривизны в центрах оснований:

$$[\ ]_0 = Eh/p k_0; [\ ]_h = Eh/p k_h.$$

Легко доказать, что кривизна  $k_0$  в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  строго больше кривизны  $k_h$  в центре полностью нагруженного основания  $z = h$ . Действительно,

$$k_0 - k_h = \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 - \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (1/2)(p/E)(1 - \mu^2)h/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) > 0.$$

Если раскрыть фигурные скобки в формуле (4.22)

$$\Delta x_p = -p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_w)[\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - 1/2 (1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_a)[\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)],$$

что и будет использовано в дальнейшем, то в алгебраической сумме двух слагаемых первое слагаемое с первой квадратной скобкой есть вклад искривления внешней оптической поверхности (полностью нагруженного основания) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора, а второе слагаемое со второй квадратной скобкой есть вклад искривления внутренней оптической поверхности (частично нагруженного основания) светопрозрачного элемента в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Сущность аналитического метода расчёта продольной расфокусировки изображения подводного объекта при использовании однопараметрического ( $m$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине – заключается в следующем.

По формуле (2.52') для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h \{ [(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 \};$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) = (p/E)h \{ 2\mu r_1/p - (1/2)(1 + \mu^2) + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) r^2/a_1^2 \}.$$

Поскольку в обоих случаях единственной переменной является радиус  $r$ , присутствующий именно и только во второй и четвёртой степенях, то каждое из деформированных оснований именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, является частью обобщённого смешанного квадратно-биквадратного параболоида вращения с перпендикулярной оси касательной плоскостью и с соприкасающимся в вершине на касательной плоскости обычным квадратным параболоидом вращения. Так как образующие обоих параболоидов вращения имеют нулевые первые производные в их общей вершине, то кривизны образующих в этой вершине равны вторым производным осевых перемещений как функций для своих образующих в этой вершине.

Луч выходит из точки на оси под углом  $\beta$  к ней и пересекается с внешней оптической поверхностью  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_h = \beta s.$$

Угол падения

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_z(\beta s, h)/\partial r;$$

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \{ [(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] r/h - (3/4)(1 - \mu^2)r^3/h^3 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) rh/a_1^2 \};$$

при бесконечно малых  $\beta \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow 0$  можно пренебречь кубом  $r^3/h^3$  бесконечно малой  $r/h$ ;

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \{ [(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] r/h - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) rh/a_1^2 \};$$

$$\partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r = (p/E) \{ [(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \};$$

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r =$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 165/244

$$\beta - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\}.$$

Угол преломления

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\alpha'_1;$$

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\beta - (n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\}.$$

Луч пересекается с внутренней оптической поверхностью  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_0 = \beta s + h\alpha'_2 + h\partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r;$$

$$R'_0 = \beta s + (n_w/n_g)\beta h - (n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\} + (p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\};$$

$$s \gg h;$$

$$R'_0 = \beta s + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\}.$$

Угол падения

$$\alpha'_3 = \alpha'_2 + \partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r - \partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r;$$

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] r/h - (3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2 \right\};$$

при бесконечно малых  $\beta \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow 0$  можно пренебречь кубом  $r^3/h^3$  бесконечно малой  $r/h$ ;

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] h \pm (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\};$$

$$\partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] h \pm (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} \langle \beta s + (n_w/n_g)\beta h + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\} \rangle ;$$

$$p/E \ll 1;$$

$$\partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] h \pm (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h];$$

$$s \gg h;$$

$$\partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] h \pm (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} \beta s;$$

$$\alpha'_3 = (n_w/n_g)\beta + (1 - n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\} - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h];$$

$$h \ll s;$$

$$\alpha'_3 = (n_w/n_g)\beta + (1 - n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\} - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} \beta s.$$

Угол преломления

$$\alpha'_4 = (n_g/n_a)\alpha'_3;$$

$$\alpha'_4 = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\} - (n_g/n_a)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} \beta s.$$

Угол отклонения преломлённого луча от оси

$$\beta' = \alpha'_4 + \partial u_z(R'_0, 0)/\partial r;$$

$$\beta' = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \right\} - (n_g/n_a)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} \beta s +$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 166/244

$$(n_w/n_g)\beta h] + (p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h];$$

$$s \gg h;$$

$$\beta' = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta s h/a_1^2\} - (n_g/n_a - 1)(p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2\}\beta s.$$

Удаление мнимой точки пересечения преломлённого луча с осью от первой (передней) главной плоскости гидрообъектива

$$s_0 = R'_0/\beta' + \Delta'''_p;$$

$$s_0 \gg \Delta'''_p;$$

$$s_0 = R'_0/\beta';$$

$$1/s_0 = \beta'/R'_0;$$

$$1/s_0 = \langle (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta s h/a_1^2\} - (n_g/n_a - 1)(p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2\}\beta s \rangle / \langle \beta s + (1 - n_w/n_g)(p/E)h\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta s h/a_1^2\} \rangle ;$$

$$p \ll E;$$

$$1/s_0 = (n_w/n_a)/s + (n_g - n_w)/n_a (p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h/a_1^2\} - (n_g/n_a - 1)(p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2\};$$

$$s_0 = s_0(p) = s_{0p};$$

$$1/s_{0p} = (n_w/n_a)/s + (n_g - n_w)/n_a (p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h/a_1^2\} - (n_g/n_a - 1)(p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2\};$$

$$1/s_{00} = (n_w/n_a)/s.$$

Тогда по формуле отрезков Гаусса [279]

$$1/s_{0p} + 1/s'_p = 1/f'_0;$$

$$1/s'_p = 1/f'_0 - 1/s_{0p} = (s_{0p} - f'_0)/(f'_0 s_{0p});$$

$$s'_p = (f'_0 s_{0p})/(s_{0p} - f'_0);$$

$$s'_p = f'_0 + f_0'^2/(s_{0p} - f'_0);$$

$$s'_0 = f'_0 + f_0'^2/(s_{00} - f'_0);$$

$$s'_0 - s'_p = f_0'^2/(s_{00} - f'_0) - f_0'^2/(s_{0p} - f'_0);$$

$$(s'_0 - s'_p)/f_0'^2 = 1/(s_{00} - f'_0) - 1/(s_{0p} - f'_0);$$

$$s_{0p} \gg f'_0.$$

Продольная расфокусировка изображения подводного объекта

$$\Delta x_p = s'_0 - s'_p = f_0'^2(1/s_{00} - 1/s_{0p});$$

$$\Delta x_p = - (n_g - n_w)/n_a f_0'^2(p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h/a_1^2\} + (n_g/n_a - 1)f_0'^2(p/E)\{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2\};$$

для гидрообъектива обычно вместо фокусного расстояния  $f'_0$  в воздухе задаётся фотограмметрическое фокусное расстояние  $f'_{\text{фв}}$  в воде

$$f'_{\text{фв}} = (n_w/n_a)f'_0; f'_0 = (n_a/n_w)f'_{\text{фв}};$$

$$(4.22')$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\text{фв}}'^2/h n_a/n_w^2 \{- (n_g - n_w)[- (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + (n_g - n_a)[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]\}.$$

А при отсутствии надобности сохранять связанные с происхождением этой заменяющей формулы (4.22) формулы (4.22') именно обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 167/244

$$[\ ]_0 = \frac{[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]}{\mu^2 a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)};$$

$$[\ ]_h = \frac{[-(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]}{a_1^2 \ln(a/a_1)},$$

позволяющие отдельно определить и учесть вклады искривлений сначала полностью нагруженного основания и затем частично нагруженного основания, можно с учётом сходства выражений в обеих квадратных скобках равносильно (эквивалентно) привести эту формулу (4.22') к более краткой итоговой формуле для продольной расфокусировки изображения подводного объекта

(4.23')

$\Delta x_p = p/E f_{\text{фв}}^2/h n_a/n_w^2 \{ (n_g - n_w)(1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (n_w - n_a)[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \}$ .  
В этой формуле (4.22') в фигурных скобках произведение  $(- (n_g - n_w))$  на первую квадратную скобку обусловлено искривлением внешней оптической поверхности (полностью нагруженного основания) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора, а произведение  $(n_g - n_a)$  на вторую квадратную скобку обусловлено искривлением внутренней оптической поверхности (частично нагруженного основания) светопрозрачного элемента. Это показано выводом (происхождением, этиологией) этой формулы (4.22'). Действительно, выше определены указанные частные производные осевых перемещений частично нагруженного основания  $z = 0$  и полностью нагруженного основания  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора по радиусу:

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r = (p/E) \{ [(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r/h - (3/4)(1 - \mu^2)r^3/h^3 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2 \};$$

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \{ [(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r/h - (3/4)(1 - \mu^2)r^3/h^3 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) rh/a_1^2 \}.$$

Для паракиального (близкого к оптической оси) луча являются бесконечно малыми угол  $\beta$  и соответствующий текущий радиус  $r$ :  $\beta \rightarrow 0, r \rightarrow 0$ .

При бесконечно малом отношении  $r/h$  можно пренебречь его кубом  $r^3/h^3$  в последних двух формулах:

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r|_{r \rightarrow 0} = (p/E)r/h [(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r|_{r \rightarrow 0} = (p/E)r/h [-(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)].$$

Последние две формулы как раз и содержат в обратном порядке обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (4.22') и показывают их происхождение и смысл.

Теперь устанавливаются указанные вершинные кривизны образующих для обоих параболоидов вращения, ввиду аннулирования первых производных равные вторым производным осевых перемещений как функций для этих образующих по радиусу для частично нагруженного основания  $z = 0$  и для полностью нагруженного основания  $z = h$  соответственно, и отношение этих кривизн в обратном порядке:

(4.24')

$$k_0 = \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 = (p/E)/h [(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$k_h = \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (p/E)/h [-(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$k_h/k_0 = [-(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] / [(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)].$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 168/244

И предпоследние две формулы как раз и содержат в обратном порядке обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (4.22') и показывают их происхождение и смысл.

Кроме того, обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (4.22') выражаются через соответствующие кривизны в центрах оснований:

$$\begin{aligned} [\ ]_0 &= Eh/p k_0; \\ [\ ]_h &= Eh/p k_h. \end{aligned}$$

Легко доказать, что кривизна  $k_0$  в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  строго больше кривизны  $k_h$  в центре полностью нагруженного основания  $z = h$ . Действительно,

$$k_0 - k_h = \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 - \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (1/2)(p/E)(1 - \mu^2)h/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) > 0.$$

Если раскрыть фигурные скобки в формуле (4.22')

$$\Delta x_p = -p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_w) \left[ -\frac{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{[\ ]_0} \right] + p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_a) \left[ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{[\ ]_h} \right],$$

что и будет использовано в дальнейшем, то в алгебраической сумме двух слагаемых первое слагаемое с первой квадратной скобкой есть вклад искривления внешней оптической поверхности (полностью нагруженного основания) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора, а второе слагаемое со второй квадратной скобкой есть вклад искривления внутренней оптической поверхности (частично нагруженного основания) светопрозрачного элемента в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Согласно формулам (2.52) – (2.55), (2.52') и (2.54') обжатие именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, давлением  $p_1$  на боковую поверхность очень сильно влияет на напряжённое состояние и поэтому на прочность этого тела, вообще не влияет на искривления его оснований и совершенно незначительно утолщает тело, чем можно пренебречь по принципу начальных размеров.

Поэтому естественно отсутствие влияния бокового давления  $p_1$  на продольную расфокусировку  $\Delta x_p$  согласно формулам (4.22), (4.22'), (4.23), (4.23').

Если использовать для определения искривлений оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность теорию круглой пластины при такой же схеме нагружения, то все подчёркнутые выражения аннулируются, считается, что оба основания искривляются одинаково, различие вкладов искривлений оснований в продольную расфокусировку изображения подводного объекта обусловлено именно и только различием разностей показателей преломления на соответствующих оптических поверхностях, так что две пары формул (4.22) и (4.22'), (4.23) и (4.23') дают в качестве своих частных предельных случаев при малой относительной толщине ( $h \ll a_1$ ) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, следующие две формулы для продольной расфокусировки соответственно:

$$(4.22'')$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 \left\{ -(n_g - n_w) \left[ \frac{(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{[\ ]_0} \right] + (n_g - n_a) \left[ \frac{(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{[\ ]_h} \right] \right\};$$

$$(4.23'')$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_w - n_a) \left[ \frac{(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{[\ ]_h} \right].$$

А две тройки формул (4.24) и (4.24') при аннулировании всех подчёркнутых выражений дают по теории круглой пластины при такой же схеме нагружения в качестве своих частных предельных случаев при малой относительной толщине ( $h \ll a_1$ ) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 169/244

указанные вершинные кривизны образующих для обоих параболоидов вращения, ввиду аннулирования первых производных равные вторым производным осевых перемещений как функций для этих образующих по радиусу для частично нагруженного основания  $z = 0$  и полностью нагруженного основания  $z = h$  соответственно, и отношение этих кривизн в обратном порядке:

$$(4.24''):$$
$$k_0 = \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 = (p/E)/h [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$
$$k_h = \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (p/E)/h [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$
$$k_h/k_0 = 1.$$

То есть по теории круглой пластины в частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковое по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) отношение кривизн в центрах полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность непременно равно единице ввиду тождественности искривлений обоих оснований.

Тем самым при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность выдержана аналитическая проверка созданной теории влияния напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента на оптические свойства иллюминатора.

Чтобы показать весьма значительно превышающую единицу и обычно составляющую примерно три-четыре кратность превышения кривизны в центре полностью нагруженного основания кривизной в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, используются численные расчёты по однопараметрическому методу устранения невязки осевого перемещения с формулой (4.24') и итогом и параллельно вслед для удобства сопоставления по двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения с взятыми в двойные кавычки «» формулой (4.24) и итогом.

В численных расчётах приняты размеры

$$a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}, h = 60 \text{ мм}$$

и соответствующие соотношения размеров

$$h = 2a_1, a = (11/6)a_1$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

или из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

при внешнем давлении

$$p = 98 \text{ МПа,}$$

значение параметра  $m$  согласно (2.36) и значение параметра  $\delta$  согласно (2.50).

Ввиду принципиальной новизны системы открытых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность и вследствие необходимости непременно доказательной силы предстоящих расчётов созданным общим (полу)степенным методом ключевые избранные из расчётов приводятся полностью как показ ясных, простых и мощных общности, применимости, воспроизводимости и проверяемости. Такие взаимосвязанные необходимые для именно глубокого понимания ясность, прозрачность, простота и убедительность немислимы для численных и экспериментальных методов, у которых есть свои важные преимущества и которые необходимо использовать для независимой проверки итогов приложения любых аналитических методов, в том числе созданного общего (полу)степенного метода.

Для оценки именно кратности превышения искривления полностью нагруженного основания  $z = h$  искривлением частично нагруженного основания  $z = 0$  избраны обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$ , а также обратное отношение

$$[\ ]_h / [\ ]_0 = k_h / k_0$$

этих квадратных скобок, равное отношению соответствующих кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания  $z = h$  и частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность. В случаях сокращений размерностей используются в данном случае простые и удобные отношения размеров именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковое по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) обратное отношение

$$[\ ]_h / [\ ]_0 = k_h / k_0$$

этих квадратных скобок, равное отношению соответствующих кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания  $z = h$  и частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, всегда равно единице согласно формулам (4.24'') по причине тождественности искривлений частично нагруженного основания  $z = 0$  и полностью нагруженного основания  $z = h$  в теории круглой пластины.

Квадратная скобка

$$[\ ]_0 = Eh/p k_0$$

для кривизны  $k_0$  в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность составляет по однопараметрическому методу устранения минимизированных невязок сопряжения согласно первой формуле (4.24') и по

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 171/244

двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения согласно первой формуле (4.24) соответственно

$$[\ ]_0 = \frac{[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)] (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{\ln(a/a_1)};$$

$$\ll [\ ]_0 = \frac{[\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]}{\ln(a/a_1)} \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277;$$

$$[\ ]_0 = \frac{[(206/291)*(1 - 0.209^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2)] + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.8112;$$

$$\ll [\ ]_0 = \frac{[0.277*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2)] + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.7907 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198;$$

$$[\ ]_0 = \frac{[(206/291)*(1 - 0.209^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2)] + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.7395;$$

$$\ll [\ ]_0 = \frac{[0.198*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2)] + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.1751 \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.209) = 0.334;$$

$$[\ ]_0 = \frac{[(206/291)*(1 - 0.209^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2)] + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.6199;$$

$$\ll [\ ]_0 = \frac{[0.334*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2)] + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.9918 \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222;$$

$$[\ ]_0 = \frac{[(206/291)*(1 - 0.365^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2)] + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.4236;$$

$$\ll [\ ]_0 = \frac{[0.222*(1 + 0.365)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2)] + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.4021 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159;$$

$$[\ ]_0 = \frac{[(206/291)*(1 - 0.365^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2)] + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.3586;$$

$$\ll [\ ]_0 = \frac{[0.159*(1 + 0.365)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2)] + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 2.8475 \gg;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 172/244

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 \cdot 0.365) = 0.281;$$

$$[\ ]_0 = [(206/291) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot (1/2) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 0) \cdot (1 - 0.365^2) + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)] = 3.2502;$$

$$\ll [\ ]_0 = [0.281 \cdot (1 + 0.365) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 0) \cdot (1 - 0.365^2) + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)] = 3.6874 \gg.$$

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковая по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) квадратная скобка  $[\ ]_0$  для кривизны в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность составляет согласно первой формуле (4.24'')

$$[\ ]_0 = [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 \cdot a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$[\ ]_0 = [(3/16) \cdot (1 - 0.209)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.209^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)] = 0.7362;$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$[\ ]_0 = [(3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)] = 0.6365.$$

Квадратная скобка

$$[\ ]_h = Eh/p k_h$$

для кривизны  $k_h$  в центре полностью нагруженного основания  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность составляет по однопараметрическому методу устранения минимизированных невязок сопряжения согласно второй формуле (4.24') и по двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения согласно второй формуле (4.24) соответственно

$$[\ ]_h = [-(1/2)(1 - \mu^2) a^2 / (3a^2 - 2a_1^2) \cdot h^2 / a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 \cdot a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$\ll [\ ]_h = [\delta(1 + \mu) h^2 / a_1^2 \cdot a^2 / (a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2) h^2 / a_1^2 \cdot a^2 / (a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 \cdot a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 173/244

$$[\sigma]_h = \left[ -\frac{(1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2)}{0.209^2*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{0.209^2*121/85*\ln(11/6)} \right] = 1.0885;$$

$$\ll [\sigma]_h = \left[ \frac{0.277*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2)}{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)} \right] = 1.0678 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198;$$

$$[\sigma]_h = \left[ -\frac{(1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2)}{0.209^2*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{0.209^2*121/85*\ln(11/6)} \right] = 1.0168;$$

$$\ll [\sigma]_h = \left[ \frac{0.198*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2)}{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)} \right] = 0.4524 \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.209) = 0.334;$$

$$[\sigma]_h = \left[ -\frac{(1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2)}{0.209^2*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{0.209^2*121/85*\ln(11/6)} \right] = 0.8972;$$

$$\ll [\sigma]_h = \left[ \frac{0.334*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2)}{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)} \right] = 1.2691 \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222;$$

$$[\sigma]_h = \left[ -\frac{(1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/291 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2)}{0.365^2*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{0.365^2*121/85*\ln(11/6)} \right] = 0.9558;$$

$$\ll [\sigma]_h = \left[ \frac{0.222*(1 + 0.365)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2)}{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)} \right] = 0.9344 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159;$$

$$[\sigma]_h = \left[ -\frac{(1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/291 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2)}{0.365^2*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{0.365^2*121/85*\ln(11/6)} \right] = 0.8908;$$

$$\ll [\sigma]_h = \left[ \frac{0.159*(1 + 0.365)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2)}{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)} \right] = 0.3797 \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.365) = 0.281;$$

$$[\sigma]_h = \left[ -\frac{(1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/291 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2)}{0.365^2*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{0.365^2*121/85*\ln(11/6)} \right] = 0.7825;$$

$$\ll [\sigma]_h = \left[ \frac{0.281*(1 + 0.365)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2)}{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)} + \frac{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)}{(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)} \right] = 1.2196 \gg.$$

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковая по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) квадратная скобка  $[\sigma]_h$  для кривизны в центре полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 174/244

основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность составляет согласно второй формуле (4.24'')

$$[\eta]_h = [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$[\eta]_h = [(3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.7362;$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$[\eta]_h = [(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.6365.$$

Отношение

$$[\eta]_h / [\eta]_0 = k_h / k_0$$

квадратных скобок  $[\eta]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  и  $[\eta]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$ , равное отношению соответствующих кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания  $z = h$  и частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, составляет по однопараметрическому методу устранения минимизированных невязок сопряжения согласно последней формуле (4.24') и по двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения согласно последней формуле (4.24) соответственно

$$k_h / k_0 = [\eta]_h / [\eta]_0 = \frac{[-(1/2)(1 - \mu^2)a^2 / (3a^2 - 2a_1^2) h^2 / a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]}{[(2a^2 - a_1^2) / (3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2) a^2 / (a^2 - a_1^2) h^2 / a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];}$$

$$\ll k_h / k_0 = [\eta]_h / [\eta]_0 = \frac{[\delta(1 + \mu)h^2 / a_1^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)h^2 / a_1^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]}{[\delta(1 + \mu)h^2 / a_1^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]} \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277;$$

$$k_h / k_0 = [\eta]_h / [\eta]_0 = \frac{[-(1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[(206/291)*(1 - 0.209^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2856;$$

$$\ll k_h / k_0 = [\eta]_h / [\eta]_0 = \frac{[0.277*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[0.277*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2817 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 175/244

$$k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[-(1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[(206/291)*(1 - 0.209^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2719;$$

$$\ll k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[0.198*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[0.198*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.1425 \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.209) = 0.334;$$

$$k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[-(1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[(206/291)*(1 - 0.209^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2479;$$

$$\ll k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[0.334*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[0.334*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.3179 \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5; \delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222;$$

$$k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[-(1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/291 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[(206/291)*(1 - 0.365^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2792;$$

$$\ll k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[0.222*(1 + 0.365)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[0.222*(1 + 0.365)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2746 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8; \delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159;$$

$$k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[-(1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/291 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[(206/291)*(1 - 0.365^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2653;$$

$$\ll k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[0.159*(1 + 0.365)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[0.159*(1 + 0.365)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.1334 \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0; \delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.365) = 0.281;$$

$$k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[-(1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/291 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[(206/291)*(1 - 0.365^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2407;$$

$$\ll k_h/k_0 = [\eta/\eta]_0 = \frac{[0.281*(1 + 0.365)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.365^2)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[0.281*(1 + 0.365)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.3308 \gg.$$

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковое по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 176/244

минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) отношение  $[\chi]_h/[\chi]_0 = k_h/k_0$  квадратной скобки  $[\chi]_h$  для кривизны  $k_h$  в центре полностью нагруженного основания  $z = h$  и квадратной скобки  $[\chi]_0$  для кривизны  $k_0$  в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность составляет согласно формулам (4.24'')

$$k_h/k_0 = [\chi]_h/[\chi]_0 = [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] / [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] = 1$$

для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из любого материала, в том числе из стекла К8 и из органического стекла.

Совокупность итогов вычислений значений квадратных скобок  $[\chi]_0$ ,  $[\chi]_h$  и их обратного отношения  $[\chi]_h/[\chi]_0 = k_h/k_0$  для кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания  $z = h$  и частично нагруженного основания  $z = 0$  соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из стекла К8 или из органического стекла, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания сведена для наглядности в таблицу 4.1.

Таблица 4.1. Значения квадратных скобок  $[\chi]_0$ ,  $[\chi]_h$  и их обратного отношения  $[\chi]_h/[\chi]_0 = k_h/k_0$  для кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания  $z = h$  и частично нагруженного основания  $z = 0$  соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из стекла К8 или из органического стекла, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность по теории круглой пластины ( $h \ll a_1$ ) и по общему (полу)степенному методу (ОСМ) при использовании двухпараметрического ( $m, \delta$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и однопараметрического ( $m$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

| Метод расчёта                                  | Значения $[\chi]_0, [\chi]_h, k_h/k_0$ для кривизн в центрах торцов |            |                               |   |            |                               |
|--|---|------------|-------------------------------|---|------------|-------------------------------|
|  | для тела (элемента) из неорганического стекла                       |            |                               | для тела (элемента) из органического стекла |            |                               |
|  | $[\chi]_0$  | $[\chi]_h$ | $[\chi]_h/[\chi]_0 = k_h/k_0$ | $[\chi]_0$                                  | $[\chi]_h$ | $[\chi]_h/[\chi]_0 = k_h/k_0$ |
| Теория круглой пластины ( $h \ll a_1$ )        | 0.7362  | 0.7362     | 1                             | 0.6365                                      | 0.6365     | 1                             |
| ОСМ, ( $m, \delta$ ), среднеквадратичный метод | 3.7907  | 1.0678     | 0.2817                        | 3.4021                                      | 0.9344     | 0.2746                        |
| ОСМ, ( $m, \delta$ ), метод минимаксов модулей | 3.1751  | 0.4524     | 0.1425                        | 2.8475                                      | 0.3797     | 0.1334                        |
| ОСМ, ( $m, \delta$ ), коллокационный метод     | 3.9918  | 1.2691     | 0.3179                        | 3.6874                                      | 1.2196     | 0.3308                        |
| ОСМ, ( $m$ ), среднеквадратичный метод         | 3.8112  | 1.0885     | 0.2856                        | 3.4236                                      | 0.9558     | 0.2792                        |
| ОСМ, ( $m$ ), метод минимаксов модулей         | 3.7395  | 1.0168     | 0.2719                        | 3.3586                                      | 0.8908     | 0.2653                        |
| ОСМ, ( $m$ ), коллокационный метод             | 3.6199  | 0.8972     | 0.2479                        | 3.2502                                      | 0.7825     | 0.2407                        |



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 177/244

Тем самым открыты и обоснованы пятые и шестые явления и законы напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Пятое явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

В-пятых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона кратного превышения кривизны в центре полностью нагруженного основания кривизной в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, так как центральная часть частично нагруженного основания не нагружена, а противодействие прикладывается лишь по периферической его части, причём при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями эта кратность составляет примерно три-четыре.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность даёт строго одинаковые кривизны в центрах полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания.

Шестое явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

В-шестых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона необходимости и чрезвычайной существенности дополнения стрелы прогиба как общей (интегральной, суммарной, рассредоточенной) характеристики искривления при изгибе ещё и кривизной как местной (локальной, сосредоточенной, концентрированной) характеристикой искривления при изгибе частично нагруженного основания и особенно полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность. Ведь полностью нагруженное основание искривляется кратно слабее частично нагруженного основания. Да и существенное положительное влияние выражения с высшей наличной степенью радиуса на стрелы прогиба оснований и их центральных частей полностью отсутствует применительно к кривизнам центров оснований. А это именно принципиально усиливает жёсткость испытания теоретического моделирования действительного объекта. К тому же общая стрела прогиба является общей характеристикой жёсткости. А местная кривизна обуславливает местные напряжения и искривление и поэтому является характеристикой прочности и оптики.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 178/244

осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность даёт строго одинаковые искривления полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания, то есть, в частности, и строго одинаковые местные кривизны, и строго одинаковые промежуточные (текущие, то есть для центрального круга произвольного радиуса) и краевые общие стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей.

Кроме того, выявлено и подтверждено следующее:

1. Однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения используют каждый все три метода минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичный, минимаксами их модулей и коллокационный, и благодаря такой многовариантности обеспечивают самопроверяемость и взаимную проверяемость.

2. Очень хорошо согласующиеся друг с другом и поэтому наиболее надёжные наилучшие итоги достигаются однопараметрическим и двухпараметрическим методами устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, а также достаточно близким к ним по итогам с приемлемыми их занижениями однопараметрическим методом устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения. Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей значительно занижает кривизну в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  и в два-три раза занижает кривизну в центре полностью нагруженного основания  $z = h$ . Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения приемлемо завышает кривизну в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  и значительно завышает кривизну в центре полностью нагруженного основания  $z = h$ .

3. Однопараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения даёт близкие между собой итоги при всех трёх методах минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной, и благодаря такой многовариантности обеспечивает инженерную точность и надёжность.

4. Кратность превышения кривизны в центре полностью нагруженного основания  $z = h$  кривизной в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями составляет примерно три-четыре и является примерно такой же, как и кратность превышения стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно.

5. Теория круглой пластины для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента занижает кривизну в центре полностью нагруженного основания  $z = h$  примерно в полтора раза и кривизну в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  примерно в пять-шесть раз.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 179/244

Для определения и сравнимости отдельных вкладов искривлений полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность в продольную расфокусировку изображения подводного объекта используются её расчёты непременно с раскрытием фигурных скобок по формуле (4.22') однопараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и со взятием в двойные кавычки «» по формуле (4.22) двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения, причём для каждого из этих методов при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, при методе минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и при методе коллокационной минимизации невязок сопряжения.

Приняты следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} h &= 60 \text{ мм;} \\ a_1 &= 30 \text{ мм;} \\ a &= 55 \text{ мм;} \\ p &= 98 \text{ МПа;} \\ n_a &= 1; \\ n_w &= 1.33; \end{aligned}$$

$$n_g = 1.52 \text{ для неорганического стекла;}$$

$$n_g = 1.49 \text{ для органического стекла;}$$

$$f_{\phi w}' = 28.8 \text{ мм.}$$

Продольная расфокусировка изображения подводного объекта составляет по формуле (4.22') однопараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения

$$\Delta x_p = - (p/E)(f_{\phi w}'^2/h)(n_a/n_w^2)(n_g - n_w) \left[ - \frac{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)} \right] + (p/E)(f_{\phi w}'^2/h)(n_a/n_w^2)(n_g - n_a) \left[ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{\ln(a/a_1)} \right]$$

и по формуле (4.22) двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения

$$\langle \Delta x_p = - (p/E)(f_{\phi w}'^2/h)(n_a/n_w^2)(n_g - n_w) \left[ \frac{\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right] + (p/E)(f_{\phi w}'^2/h)(n_a/n_w^2)(n_g - n_a) \left[ \frac{\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right] \rangle.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) =$$

$$(7/20)(1 - 0.209) = 0.277;$$

$$\Delta x_p = - 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * \left[ - \frac{(1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/291 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)}{(1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)} \right] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * \left[ \frac{(206/291) * (1 - 0.209^2) * (1/2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)}{(1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)} \right] = - 0.001966 + 0.01883 = 0.01687 \text{ (мм);}$$

$$\langle \Delta x_p = - 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * \left[ \frac{0.277 * (1 + 0.209) * 4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)}{(1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)} \right] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * \left[ \frac{0.277 * (1 + 0.209) * 4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)}{(1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)} \right] \rangle.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 180/244

$$0.209)^4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.001928 + 0.01873 = 0.01680 \text{ (мм)}; \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) =$$

$$(1/4)(1 - 0.209) = 0.198;$$

$$\Delta x_p = - 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/291 + (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.209^2) * (1/2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.001836 + 0.01848 = 0.01664 \text{ (мм)};$$

$$\ll \Delta x_p = - 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [0.198 * (1 + 0.209) * 4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [0.198 * (1 + 0.209) * 4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.0008168 + 0.01569 = 0.01487 \text{ (мм)} \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.209) = 0.334;$$

$$\Delta x_p = - 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/291 + (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.209^2) * (1/2) * 4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.001620 + 0.01789 = 0.01627 \text{ (мм)};$$

$$\ll \Delta x_p = - 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [0.334 * (1 + 0.209) * 4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.209^2) * 4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [0.334 * (1 + 0.209) * 4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.002291 + 0.01972 = 0.01743 \text{ (мм)} \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222;$$

$$\Delta x_p = - 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.365^2) * 4 * 121/291 + (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.365^2) * (1/2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.03866 + 0.4240 = 0.3854 \text{ (мм)};$$

$$\ll \Delta x_p = - 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [0.222 * (1 + 0.365) * 4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.365^2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [0.222 * (1 + 0.365) * 4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.03779 + 0.4214 = 0.3836 \text{ (мм)} \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 181/244

$$\Delta x_p = - 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.365^2) * 4 * 121/291 + (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.365^2) * (1/2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.03603 + 0.4160 = 0.3799 \text{ (мм)};$$

$$\ll \Delta x_p = - 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [0.159 * (1 + 0.365) * 4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.365^2) * 4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [0.159 * (1 + 0.365) * 4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.01536 + 0.3527 = 0.3373 \text{ (мм)} \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.365) = 0.281;$$

$$\Delta x_p = - 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.365^2) * 4 * 121/291 + (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.365^2) * (1/2) * 4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.03165 + 0.4026 = 0.3709 \text{ (мм)};$$

$$\ll \Delta x_p = - 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [0.281 * (1 + 0.365) * 4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.365^2) * 4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [0.281 * (1 + 0.365) * 4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.04932 + 0.4567 = 0.4074 \text{ (мм)} \gg.$$

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковая по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) продольная расфокусировка  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность составляет согласно формуле (4.22'') непременно с раскрытием фигурных скобок

$$\Delta x_p = - p/E f_{\phi w}^2 / h n_a / n_w^2 (n_g - n_w) [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + p/E f_{\phi w}^2 / h n_a / n_w^2 (n_g - n_a) [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$\Delta x_p = - 98/80600 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [(3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [(3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.001329 + 0.003638 = 0.002308 \text{ (мм)};$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$\Delta x_p = - 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [(3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [(3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.02574 + 0.07884 = 0.05309 \text{ (мм)}.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 182/244

Совокупность итогов вычислений (с разделением вкладов искривлений обоих оснований) продольной расфокусировки  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта, обусловливаемой деформированием именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла или из органического стекла, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, сведена в таблицу 4.2.

Таблица 4.2. Продольная расфокусировка  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта, обусловливаемая деформированием именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла или из органического стекла, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность при давлении  $p = 98$  МПа по теории круглой пластины ( $h \ll a_1$ ) и по общему (полу)степенному методу (ОСМ) при использовании двухпараметрического ( $m, \delta$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и однопараметрического ( $m$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине (в каждой алгебраической сумме как итоговой продольной расфокусировке первое слагаемое есть вклад искривления полностью нагруженного основания  $z = h$ , а второе слагаемое есть вклад искривления частично нагруженного основания  $z = 0$ ).

| Метод расчёта                                  | Продольная расфокусировка $\Delta x_p$ , мкм  |   |
|--|---|---|
|  | для тела (элемента) из неорганического стекла | для тела (элемента) из органического стекла |
| Теория круглой пластины ( $h \ll a_1$ )        | - 1.329 + 3.637 = 2.308                       | - 25.74 + 78.84 = 53.09                     |
| ОСМ, ( $m, \delta$ ), среднеквадратичный метод | - 1.928 + 18.73 = 16.80                       | - 37.79 + 421.4 = 383.6                     |
| ОСМ, ( $m, \delta$ ), метод минимаксов модулей | - 0.8168 + 15.69 = 14.87                      | - 15.36 + 352.7 = 337.3                     |
| ОСМ, ( $m, \delta$ ), коллокационный метод     | - 2.291 + 19.72 = 17.43                       | - 49.32 + 456.7 = 407.4                     |
| ОСМ, ( $m$ ), среднеквадратичный метод         | - 1.966 + 18.83 = 16.87                       | - 38.66 + 424.0 = 385.4                     |
| ОСМ, ( $m$ ), метод минимаксов модулей         | - 1.836 + 18.48 = 16.64                       | - 36.03 + 416.0 = 379.9                     |
| ОСМ, ( $m$ ), коллокационный метод             | - 1.620 + 17.89 = 16.27                       | - 31.65 + 402.6 = 370.9                     |

Тем самым открыты и обоснованы седьмые, восьмые, девятые и десятые явления и законы напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Седьмое явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

В-седьмых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона кратного превышения модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания положительным вкладом кривизны в

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 183/244

центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность в продольную расфокусировку изображения подводного объекта, причём при типичных для высокого давления соотношениях размеров тела (светопрозрачного элемента) со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями эта кратность составляет примерно 10. При этом умножаются друг на друга два эффекта для сомножителей произведения. Во-первых, и это имеет место даже для сколь угодно тонкого стеклоэлемента, разность показателей преломления стекла и воздуха, разделяемых частично нагруженным основанием, примерно втрое больше разности показателей преломления стекла и воды, разделяемых полностью нагруженным основанием. Во-вторых, кривизна в центре частично нагруженного основания примерно в три-четыре раза больше кривизны в центре полностью нагруженного основания. Кроме того, отрицательный вклад кривизны в центре полностью нагруженного основания и положительный вклад кривизны в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность в продольную расфокусировку изображения подводного объекта вскрывают её природу, сущность, состав и слагаемость по диалектическому закону единства и борьбы противоположностей.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность даёт строго одинаковые кривизны в центрах полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания. Так что из двух названных эффектов присутствует только первый, причём полностью. Поэтому имеет место примерно трёхкратное превышение модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания положительным вкладом кривизны в центре частично нагруженного основания именно тонкой круглой пластины в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Восьмое явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

В-восьмых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона необходимости, полезности и чрезвычайной существенности выделения и непременно достаточно точного учёта знака и относительно малого модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность в продольную расфокусировку изображения подводного объекта взамен, казалось бы, допустимого полного пренебрежения этим малым вкладом, по модулю на порядок меньшим положительного вклада кривизны в центре частично нагруженного основания.

Как раз относительная малость модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания позволяет жёстко испытывать методы моделирования напряжённо-

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 184/244

деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в т. ч. светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность даёт строго одинаковые искривления полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания, то есть, в частности, и строго одинаковые местные кривизны, и строго одинаковые промежуточные (текущие, то есть для центрального круга произвольного радиуса) и краевые общие стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей соответственно, тем самым не только не вскрывая относительной малости кривизны в центре полностью нагруженного основания по сравнению с кривизной в центре частично нагруженного основания, но и вообще не различая эти две кривизны между собой.

Всеобщие явление и закон целесообразности относительной малости модуля количественного величиной и качественного знаком оценивающего различителя методов моделирования между собой

Эти восьмые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность привели к открытию и обоснованию всеобщих явления и закона целесообразности относительной малости модуля количественного величиной и качественного знаком оценивающего различителя методов моделирования между собой.

Причина такой целесообразности заключается в следующем.

Если модуль количественного величиной и качественного знаком оценивающего различителя методов моделирования между собой относительно мал, то даже сравнительно небольшая абсолютная погрешность метода моделирования влечёт большую относительную погрешность и может привести не только к чисто количественному отклонению модуля модельного значения от модуля объектного значения при именно качественном совпадении знаков этих значений, но и к качественному извращению объекта моделью при различии знаков этих значений по диалектическому закону перехода количественных изменений в качественные изменения.

Девятое явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

В-девятых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона необходимости и полезности (для углубления исследования напряжённо-деформированного состояния) промежуточного выхода исследования за собственные пределы напряжённо-деформированного состояния с последующим возвращением исследования к напряжённо-деформированному состоянию по диалектическому закону отрицания отрицания.

В данном случае имеет место временный переход от исследования самого напряжённо-деформированного состояния к исследованию влияния напряжённо-деформированного состояния на свойство за непосредственными пределами напряжённо-деформированного состояния, а именно выход за пределы механики в оптику посредством учёта влияния напряжённо-деформированного состояния на оптические свойства, в частности на



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 185/244

продольную расфокусировку изображения подводного объекта, затем возврат к исследованию напряжённо-деформированного состояния, теперь ещё и кривизн в центрах оснований именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Во-первых, в данном случае такой выход за пределы механики в оптику именно привёл к принципиальному расширению предмета исследования посредством добавления кривизны в центре частично нагруженного основания и кривизны в центре полностью нагруженного основания к обычным в механике изгиба стрелам прогиба центральных частей и взятых целиком частично нагруженного основания и полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность.

Ведь это добавление оказалось вынужденным, поскольку именно исследование показало, что продольная расфокусировка изображения подводного объекта определяется не стрелами прогиба центральных частей и взятых целиком частично нагруженного основания и полностью нагруженного основания, а кривизной в центре частично нагруженного основания и кривизной в центре полностью нагруженного основания, как выведено из рассмотрения хода параксиального (близкого к оптической оси) луча.

Во-вторых, в данном случае такой выход за пределы механики в оптику именно привёл к принципиальному углублению предмета исследования.

Существенное положительное влияние выражения с высшей наличной степенью радиуса на стрелы прогиба оснований и их центральных частей полностью отсутствует применительно к кривизнам в центрах оснований.

А это именно принципиально усиливает жёсткость испытания теоретического моделирования действительного объекта.

В-третьих, в данном случае такой выход за пределы механики в оптику именно привёл к принципиальному изменению сущности исследования.

Общая стрела прогиба является общей характеристикой жёсткости.

А местная кривизна обуславливает местные напряжения и искривление и поэтому является характеристикой прочности и оптики.

В-четвёртых, в данном случае такой выход за пределы механики в оптику именно привёл к принципиальному повышению чувствительности различения методов моделирования.

Местная кривизна играет роль именно качественного исследовательского микроскопа, преобразующего количественные отклонения теоретических моделей от действительных объектов в принципиальные качественные изменения с возможностью превращения положительности в отрицательность, то есть осуществляющего диалектический закон перехода количественных изменений в качественные изменения.

Кроме того, и это имеет место даже для сколь угодно тонкого стеклоэлемента, разность показателей преломления стекла и воздуха, разделяемых частично нагруженным основанием, примерно втрое больше разности показателей преломления стекла и воды, разделяемых полностью нагруженным основанием. Это дополнительно снижает вклад и без того относительно малого искривления полностью нагруженного основания по сравнению с вкладом искривления частично нагруженного основания и тем самым влечёт повышение относительной погрешности определения вклада искривления полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 186/244

нагруженного основания и на боковую поверхность в продольную расфокусировку изображения подводного объекта даже при малой абсолютной погрешности.

Именно относительная малость модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания позволяет наиболее жёстко испытывать методы моделирования напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, причём не только количественно, то есть по абсолютной величине, но и качественно, то есть по знаку.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность даёт строго одинаковые искривления полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания, то есть, в частности, и строго одинаковые местные кривизны, и строго одинаковые промежуточные (текущие, то есть для центрального круга произвольного радиуса) и краевые общие стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей.

Даже для сколь угодно тонкого стеклоэлемента разность показателей преломления стекла и воздуха, разделяемых частично нагруженным основанием, примерно втрое больше разности показателей преломления стекла и воды, разделяемых полностью нагруженным основанием.

Поэтому в данном случае такой выход за пределы механики в оптику приводит к занижению примерно в три-четыре раза десятикратного отношения положительного вклада искривления частично нагруженного основания к модулю отрицательного вклада искривления полностью нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Всеобщие явление и закон целесообразности промежуточного выхода исследования за пределы предмета первоначального рассмотрения с последующим возвращением исследования к этому предмету по диалектическому закону отрицания отрицания

Эти девятые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность привели к открытию и обоснованию всеобщих явления и закона целесообразности промежуточного выхода исследования за пределы предмета первоначального рассмотрения с последующим возвращением исследования к этому предмету по диалектическому закону отрицания отрицания.

Причина такой целесообразности заключается в следующем.

Временный выход исследования за непосредственные пределы предмета первоначального рассмотрения ведёт к расширению предмета исследования и как следствие может привести к углублению исследования расширенного предмета.

Предмет исследования может иметь даже бесконечное множество свойств.

Каждое конкретное исследование имеет начало и конец и тем самым является конечным, так что вынуждено изначально избрать весьма ограниченное подмножество исследуемых свойств, априорно представляющихся наиболее существенными.

Расширение предмета исследования может привести к апостериорному вовлечению дополнительных свойств первоначального предмета, существенных для расширения предмета, и тем самым не только к расширению исследования расширением предмета исследования, но и к углублению исследования самого предмета первоначального рассмотрения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 187/244

Десятые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность

В-десятых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона необходимости и полезности неперемного выделения и отдельного исследования влияний отдельных существенных следствий (свойств, частей, элементов) напряжённо-деформированного состояния наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, в данном случае влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Ведь анализ (разделение) входит наряду с последующим синтезом (соединением), сравнением и моделированием, вычислением и измерением в число основополагающих научных методов.

В данном случае выделение и отдельное исследование влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта по формулам (4.22) и (4.22') позволяет более обоснованно количественно ввиду возможности дополнительных сравнений и качественно ввиду относительной малости модуля вклада искривления полностью нагруженного основания проверить и оценить однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения при всех трёх методах минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной.

Благодаря такой многовариантности обеспечиваются самопроверяемость и взаимная проверяемость и устанавливаются по принципу достаточного основания как четвёртому закону формальной логики наибольшие точность и надёжность однопараметрического и двухпараметрического методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения и соответствующих значений и составляющих суммарной продольной расфокусировки изображения подводного объекта для светопрозрачного элемента из неорганического стекла

$$\Delta x_p = - 1.966 \text{ мкм} + 18.83 \text{ мкм} = 16.87 \text{ мкм},$$
$$\langle \Delta x_p = - 1.928 \text{ мкм} + 18.73 \text{ мкм} = 16.80 \text{ мкм} \rangle$$

и для светопрозрачного элемента из органического стекла

$$\Delta x_p = - 38.66 \text{ мкм} + 424.0 \text{ мкм} = 385.4 \text{ мкм},$$
$$\langle \Delta x_p = - 37.79 \text{ мкм} + 421.4 \text{ мкм} = 383.6 \text{ мкм} \rangle.$$

А по формулам (4.23) и (4.23') без выделения и отдельного исследования влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта такая многовариантность методов не позволила бы более обоснованно количественно посредством возможности дополнительных сравнений и качественно посредством относительной малости модуля вклада искривления полностью нагруженного основания проверить и оценить однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения при всех трёх методах минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 188/244

боковую поверхность по явлению и закону необходимости и полезности неперемного выделения и отдельного исследования влияний отдельных существенных следствий напряжённо-деформированного состояния наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния напряжённо-деформированного состояния, в данном случае влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта, даёт строго одинаковые искривления полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания, то есть, в частности, и строго одинаковые местные кривизны, и строго одинаковые промежуточные (текущие, то есть для центрального круга произвольного радиуса) и краевые общие стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей. Даже для сколь угодно тонкого стеклоэлемента разность показателей преломления стекла и воздуха, разделяемых частично нагруженным основанием, примерно втрое больше разности показателей преломления стекла и воды, разделяемых полностью нагруженным основанием. Поэтому в данном случае такие явление и закон приводят к занижению примерно в три-четыре раза десятикратного отношения вклада искривления частично нагруженного основания к модулю вклада искривления полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Всеобщие явление и закон необходимости и полезности неперемного выделения и отдельного исследования составляющих влияний отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния целого на предмет исследования

Эти десятичные явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность привели к открытию и обоснованию всеобщих явления и закона необходимости и полезности неперемного выделения и отдельного исследования составляющих влияний отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния целого на предмет исследования.

Причина такой необходимости и полезности заключается в следующем.

Именно дополнительное неперемное выделение и отдельное исследование составляющих влияний отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния целого на предмет исследования позволяет более обоснованно количественно ввиду возможности дополнительных сравнений и качественно ввиду возможности относительной малости модулей составляющих влияний некоторых отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования проверить и оценить создаваемые методы моделирования.

Анализ отдельных частей и свойств целого и их отдельных влияний на предмет исследования углубляет представление о целом, его отдельных частях и свойствах и позволяет изучить сходства и различия их отдельных влияний на предмет исследования.

При этом синтез отдельных частей и свойств как первого отрицания целого даёт целое вторым отрицанием отдельных частей и свойств по закону отрицания отрицания.

А синтез отдельных влияний отдельных частей и свойств как первого отрицания влияния целого на предмет исследования даёт влияние целого на предмет исследования вторым отрицанием влияний отдельных частей и свойств на предмет исследования по закону отрицания отрицания.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 189/244

Эти анализ и синтез открывают возможности новых сопоставлений, сравнений и углублений и обобщают известный закон отрицания отрицания общим законом кратного отрицания.

Кроме того, выявлено и подтверждено следующее:

1. Однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения используют каждый все три метода минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичный, минимаксами их модулей и коллокационный, и благодаря такой многовариантности обеспечивают самопроверяемость и взаимную проверяемость.

2. Очень хорошо согласующиеся друг с другом и поэтому наиболее точные и надёжные значения продольной расфокусировки  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта и непременно отдельных вкладов в неё кривизны в центрах полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность достигаются однопараметрическим и двухпараметрическим методами устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, а также достаточно близким к ним по итогам с приемлемыми их занижениями однопараметрическим методом устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения. Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей значительно занижает, а по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения существенно завышает продольную расфокусировку изображения подводного объекта, положительный вклад в неё кривизны в центре частично нагруженного основания и особенно значительно относительно малый модуль отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

3. Однопараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения даёт близкие между собой итоги при всех трёх методах минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной, и благодаря такой многовариантности обеспечивает инженерную точность и надёжность. При этом особенно близкие между собой итоги при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения и при методе минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей представляются наиболее точными и надёжными.

4. Положительный вклад кривизны в центре частично нагруженного основания больше модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность при типичных для высокого давления соотношениях размеров в продольную расфокусировку изображения подводного объекта примерно в 10 раз для неорганического стекла с меньшим коэффициентом поперечной деформации Пуассона и примерно в 12 раз для органического стекла с большим коэффициентом поперечной деформации Пуассона.

5. Теория круглой пластины занижает примерно в полтора раза модуль отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания, примерно в пять-шесть раз положительный вклад кривизны в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 190/244

нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность при типичных для высокого давления соотношениях размеров в продольную расфокусировку изображения подводного объекта и примерно в семь-восемь раз суммарную продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

6. Продольная расфокусировка  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта в случае выполнения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента из органического стекла неприемлема, а при светопрозрачном элементе из неорганического стекла существенна и превосходит втрое допускаемую величину [177]

$$[\Delta x] = 5 \text{ мкм.}$$

Для улучшения качества изображения наряду со способами [101] предлагается устанавливаемая в процессе самой юстировки при  $p = 0$  такая предварительная продольная расфокусировка  $\Delta x_0'$  оптической системы, которая минимизирует как целевую функцию рабочую расфокусировку

$$\Delta x_p' = \Delta x_p + \Delta x_0'.$$

При этом минимизация должна осуществляться для рабочего диапазона давлений  $[p_{\min}, p_{\max}]$ . Среднеквадратичная минимизация рабочей расфокусировки выполняется стандартно и даёт

$$(4.25)$$

$$\Delta x_0' = -\Delta x_{pm},$$

где учтена пропорциональность  $\Delta x_p$  и  $p$ , а среднее рабочее давление

$$p_m = (p_{\min} + p_{\max})/2.$$

Обеспечим теперь минимизацию рабочей расфокусировки минимаксом модуля  $\Delta x_p'$ , причём максимум берётся по рабочему диапазону давлений  $[p_{\min}, p_{\max}]$ , а минимум – по искомому значению  $\Delta x_0'$ . Справедлива цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \max|\Delta x_p'| &= \max\{|\Delta x_{p_{\min}}'|; |\Delta x_{p_{\max}}'|\} \geq (|-\Delta x_{p_{\min}}'| + |\Delta x_{p_{\max}}'|)/2 \geq \\ &|- \Delta x_{p_{\min}}'| + \Delta x_{p_{\max}}'|/2 = |\Delta x_{p_{\max}}'| - \Delta x_{p_{\min}}'|/2. \end{aligned}$$

Необходимые и в совокупности достаточные условия равенства крайних выражений

$$\text{sign}(-\Delta x_{p_{\min}}') = \text{sign}(\Delta x_{p_{\max}}'); \quad |-\Delta x_{p_{\min}}'| = |\Delta x_{p_{\max}}'|$$

вместе равносильны (эквивалентны) одному дающему (4.25) условию  $(-\Delta x_{p_{\min}}') = \Delta x_{p_{\max}}'$ .

Коллокационная минимизация рабочей расфокусировки даёт равносильные (эквивалентные) аннулирования  $\int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \Delta x_p' dp = 0$ ,  $\Delta x_{pm}' = 0$  и вновь (4.25).

Рабочая расфокусировка

$$(4.26)$$

$$\Delta x_p' = \Delta x_p - \Delta x_{pm} = \Delta x_p - p_m$$

оказывается уже знакопеременной, причём

$$(4.27)$$

$$\max|\Delta x_p'| = 1/2(1 - p_{\min}/p_{\max})\max\Delta x_p = (1/2)(1 - p_{\min}/p_{\max})\Delta x_{p_{\max}}.$$

Из (4.27) видно, что абсолютная величина расфокусировки (4.26) уменьшается по сравнению с (4.23) в  $2/(1 - p_{\min}/p_{\max})$  раз, то есть не менее чем вдвое, а на практике гораздо больше.

Например, при исследовании участков океанского дна в диапазоне глубин 4000...6000 м начальная расфокусировка противоположного знака в расчёте на глубину 5000 м снижает максимальную рабочую расфокусировку оптической системы по абсолютной величине в 6 раз, то есть для сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента из неорганического стекла до 1.7 мкм, что уже вполне допустимо.

Предыдущие рассуждения относятся к изучению влияния деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента на оптические свойства иллюминатора для высоких давлений.

Что касается изучаемого методами фотоупругости влияния напряжённого состояния стекла на его оптическую анизотропию путём его поляризации [178], то направление соответствующего анализа принципиально ясно ввиду совпадения главных осей и линейных зависимостей показателей преломлений от напряжений. Достаточно при исследовании прохождения светового луча разбить именно существенно трёхмерный сплошной

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 191/244

цилиндрический светопрозрачный элемент на бесконечно тонкие слои, в пределах каждого из которых показатель преломления в направлении луча можно считать постоянным, и заменить интегральную сумму интегралом. Однако нет необходимости в этих громоздких выкладках, поскольку известно [128], что можно ожидать изменений показателя преломления лишь в третьем-четвёртом знаке после запятой, то есть за пределами инженерной точности расчётов. Проведём более детальную оценку влияния напряжений на продольную расфокусировку изображения подводного объекта. Изучение хода параксиального луча требует знания изменения вдоль оси показателя преломления  $n_z$  в осевом направлении с учётом оптической анизотропии напряжённого стекла.

Обозначив через  $n_0$  показатель преломления для ненапряжённого (а значит, изотропного) состояния стекла, по известной [178] линейной зависимости от главных напряжений

$n_z - n_0 = C_1\sigma_z + C_2(\sigma_r + \sigma_t)$ ,  $C_1 = 0.0000005 \text{ МПа}^{-1}$ ,  $C_2 = 0.0000032 \text{ МПа}^{-1}$  ([47] для стекла К8) при  $h = 60 \text{ мм}$ ;  $a_1 = 30 \text{ мм}$ ;  $a = 55 \text{ мм}$ ;  $p = p_1 = 98 \text{ МПа}$

получаем, что  $n_z(z)$  – монотонно убывающая функция  $z$ , причём

$$n_z(h) = n_z(0) - 0.00085 = n_0 - 0.00104,$$

что даже усиливает оценку [174] степени влияния напряжений на показатель преломления.

Влияние действующих в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом светопрозрачном элементе напряжений на продольную расфокусировку оптической системы сводится к уменьшению продольной расфокусировки менее чем на  $0.03 \text{ мкм}$ , что находится в пределах инженерной точности её определения и не имеет практического значения.

Влияние действующих в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом светопрозрачном элементе напряжений на остальные габаритные и абберационные характеристики столь же мало.

Следовательно,

влияние напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

на оптические свойства иллюминатора

по существу сводится к влиянию искривлений оптических поверхностей светопрозрачного элемента

на продольную расфокусировку изображения подводного объекта оптической системой в целом, включающей светопрозрачный элемент,

и в основном обусловлено кривизной в центре частично нагруженной внутренней оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Независимость искривлений оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

при схеме нагружения с повышенным равномерным периферическим противодавлением от величины равномерного давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела

значительно упрощает комплексный расчёт иллюминатора

как составной части оптической системы для высоких давлений.

#### **4.3. Метод и алгоритм комплексной оптимизации прочности, жёсткости и оптических свойств именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания**

Созданные общие теории деформирования, прочности и разрушения, жёсткости и оптики именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на одно и на кольцевую

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 192/244

периферическую часть другого основания непременно совместно являются основой для метода и алгоритма комплексной оптимизации характеристик светопрозрачного элемента.

Исходными данными для этих метода и алгоритма являются:

давление  $p$ , соответствующее максимальной рабочей глубине подводного аппарата;  
упругие постоянные –

модуль продольной упругости Юнга  $E$  и

коэффициент поперечной деформации Пуассона  $\mu$

материала именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;

характеристики прочности материала именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

при одноосных напряжённых состояниях при числе циклов и длительности нагружения, соответствующих рабочим,

или, по меньшей мере, примерно вдвое большие характеристик длительной прочности характеристики кратковременной прочности при однократных испытаниях при растяжении  $\sigma_t$  и при сжатии  $\sigma_c$ ;

допускаемая стрела прогиба  $[\Delta_{\text{раб}}]$  светового участка частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;

допускаемая величина продольной расфокусировки  $[\Delta x]$ ;

показатели преломления

воздуха  $n_a$ ,

воды  $n_w$

и материала именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,  $n_g$ ;

характеристики гидрообъектива:

угол поля зрения

в воздухе  $2\beta_a$

(или в воде  $2\beta_w$ ),

световой радиус первой линзы  $a_{об}$ ,

фотограмметрическое фокусное расстояние

в воде  $f_{\text{фв}}'$

(или фокусное расстояние

в воздухе  $f_0'$ ).

В процессе проектирования иллюминатора для высоких давлений должны быть определены следующие величины:

давление  $p_1$  на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;

габариты именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

толщина  $h$ ,

радиус  $a$ ,

радиус центральной части  $a_1$ ;

характеристики фланца:

толщина  $h_f$ ,

вынос  $\Delta_f$ ;

радиальный зазор между именно существенно трёхмерным сплошным цилиндрическим телом, в частности светопрозрачным элементом, и оправой  $\Delta'_r$ ;

осевой зазор между именно существенно трёхмерным сплошным цилиндрическим телом, в частности светопрозрачным элементом, и краем светового участка первой поверхности объектива  $\Delta'_0$ .



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 193/244

Комплексная оптимизация именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений, осуществляется следующим алгоритмом:

1) выбирается минимально допустимая величина  $\Delta'_0$ , которая на основании прикидочного расчёта обеспечивала бы осевой зазор между именно существенно трёхмерным сплошным цилиндрическим телом, в частности светопрозрачным элементом, и гидрообъективом при деформировании в процессе пребывания подводного аппарата на рабочей глубине, с учётом  $[\Delta_{раб}]$ , кривизны первой оптической поверхности объектива и толщины его корпуса у её края. Во многих случаях можно исходить из промежутка

$$\Delta'_0 = 1...5 \text{ мм}$$

с исправлением по конструктивным соображениям;

2) определяется по (4.21)  $[a_1]_{раб}$  и выбирается  $a_1$ ;

3) выбираются минимально допустимые толщина  $h_f$  и вынос  $\Delta_f$  фланца;

4) выбирается  $a$  в пределах

$$(1.5...2)a_1$$

с учётом опыта проектирования и испытаний иллюминаторов;

5) определяется допустимая толщина именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$h([\Delta x])$$

по допускаемой продольной расфокусировке  $[\Delta x]$  и выбирается

$$h \geq h([\Delta x]);$$

6) определяется допускаемое значение толщины именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$h([\Delta_{раб}])$$

по условию жёсткости (4.19) и проверяется выполнение условия

$$h \geq h([\Delta_{раб}])$$

(или  $h$  подставляется в условие жёсткости (4.19)) и, если оно нарушено,  $h$  увеличивается согласно последнему неравенству;

7) проверяется выполнение условия

$$a \geq [a]_{раб}$$

по (4.21), при нарушении принимается  $a = [a]_{раб}$  с возвратом к 5);

8) определяется зависимость разрушающего давления  $p_u$  от отношения  $\Pi$  давления  $p_1$  на боковую поверхность и внешнего давления  $p$  из условия прочности и выбирается рациональное значение

$$p_1 = (1... \Pi_{max})p;$$

9) определяется допустимое значение толщины именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,  $h(\sigma_t, \sigma_c)$  из условия прочности, проверяется выполнение условия

$$h \geq h(\sigma_t, \sigma_c)$$

и, если оно нарушено, принимается  $h$  в соответствии с ним с возвратом к 7);

10) выбирается радиальный зазор  $\Delta'_r$  между именно существенно трёхмерным сплошным цилиндрическим светопрозрачным элементом и оправой из условия жёсткости (4.20);

11) проверяется выполнение условия 1) по уточнённому расчёту, при необходимости исправляется  $\Delta'_0$  с последующим пересчётом.

Блок-схема приведённого алгоритма комплексной оптимизации именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений, показана на рис. 4.4.

Результаты использования приведённого алгоритма комплексной оптимизации именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений, могут быть использованы при разработке конструкций иллюминаторов для высоких давлений.

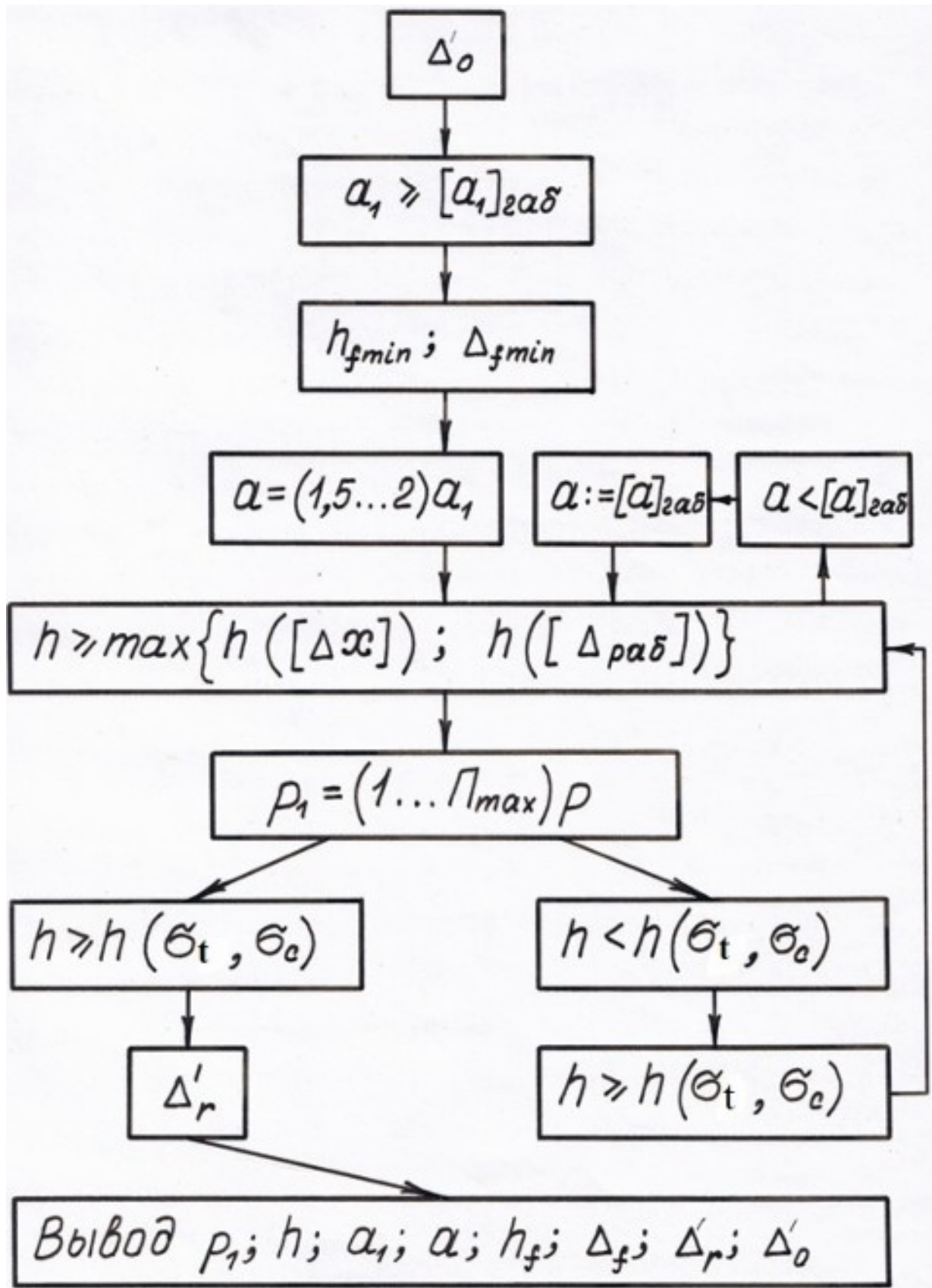


Рисунок 4.4. Блок-схема алгоритма комплексной оптимизации именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 195/244

#### **4.4. Создание общих теории и методов обобщения критериев предельных состояний и прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений с деформированием и/или движением (смещением, вращением) предельной поверхности на случай анизотропии и различных сопротивлений материала растяжению и сжатию для исследований прочности органического стекла при сложном напряжённом состоянии**

В лаборатории прочности кафедры сопротивления материалов Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина выполнен комплекс исследований жёсткости и прочности стеклоэлементов в различных конструкциях иллюминаторов, а также прочности и разрушения основных светопрозрачных материалов.

По инициативе А. А. Каминского на установке О. Е. Ольховика (Ленинградское высшее военно-инженерное строительное училище) были выполнены экспериментальные исследования прочности органического стекла при плоском напряжённом состоянии, на основе которых автор осуществил соответствующие теоретические исследования прочности органического стекла при сложном напряжённом состоянии [88].

В процессе исследований первоначально можно ограничиться рассмотрением прочности органического стекла при плоском напряжённом состоянии и далее перейти к сложному напряжённому состоянию с помощью известных или новых критериев прочности.

Плоское напряжённое состояние можно характеризовать значениями могущих быть ненулевыми главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Поэтому по предельной кривой прочности в координатах  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  можно определить такие сочетания значений могущих быть ненулевыми  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , при которых наступает разрушение.

Цель этих исследований прочности органического стекла – построить предельную кривую прочности и описать её аналитически с помощью известных или новых критериев прочности.

Чтобы построить предельную кривую, необходимо располагать данными о прочности образцов во всех четырёх квадрантах плоскости могущих быть ненулевыми главных напряжений при различных напряжённых состояниях, например двухосном растяжении, двухосном сжатии и сдвиге.

С учётом изотропности органического стекла его предельная поверхность должна быть симметричной относительно главной диагонали пространства главных напряжений, а при двухосном напряжённом состоянии предельная кривая должна быть симметричной относительно главной диагонали плоскости могущих быть ненулевыми главных напряжений, то есть биссектрисы угла между осями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и её продолжения в третьем квадранте.

Для испытаний использовались трубчатые образцы внутренним радиусом  $v = 6$  мм и толщиной стенки  $w = 1$  мм, нагружаемые внешним  $p$  и внутренним  $p + \Delta p$  (с избыточным  $\Delta p$  по сравнению с внешним  $p$ ) давлениями.

Рассмотрим напряжённое состояние трубчатых образцов.

Полагая, что толщина стенки  $w$  мала по сравнению с радиусом  $v$ , для радиального, тангенциального (окружного) и осевого напряжений в случае нагружения образца только внутренним давлением  $\Delta p$  имеем:

$$(4.28)$$

$$\sigma_r^* = 0;$$

$$\sigma_t^* = \Delta p v / w = \sigma_1;$$

$$\sigma_z^* = \Delta p v / (2w) = \sigma_2;$$

при нагружении внешним и внутренним давлениями

$$(4.29)$$

$$\sigma_r = -p + \sigma_r^* = -p;$$

$$\sigma_t = -p + \sigma_t^* = -p + \Delta p v / w = \sigma_1;$$

$$\sigma_z = -p + \sigma_z^* = -p + \Delta p v / (2w) = \sigma_2.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 196/244

Следовательно, при  $p = 0$  осуществляется двухосное растяжение, причём  $\sigma_1 = 2\sigma_2$ ,  $\sigma_3 = 0$ :

$$(4.30)$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t = \Delta p v / w; \\ \sigma_2 &= \sigma_z = \Delta p v / (2w); \\ \sigma_3 &= \sigma_r = 0;\end{aligned}$$

при  $p = \Delta p v / (2w)$  имеет место чистый сдвиг, причём  $\sigma_1 = -\sigma_3$ ,  $\sigma_2 = 0$ :

$$(4.31)$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t = \Delta p v / (2w); \\ \sigma_2 &= \sigma_z = 0; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -\Delta p v / (2w); \end{aligned}$$

при  $p = \Delta p v / w$  получается двухосное сжатие, причём  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = 2\sigma_2$ :

$$(4.32)$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t = 0; \\ \sigma_2 &= \sigma_z = -\Delta p v / (2w); \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -\Delta p v / w.\end{aligned}$$

Нагружением образца внешним и внутренним избыточным давлениями в указанных соотношениях можно было бы определить точки на предельной кривой, соответствующие формулам (4.30) – (4.32), и использовать эти точки для построения предельной кривой.

Однако создание внешнего и внутреннего давлений в заданных соотношениях сопряжено с техническими трудностями. Поэтому испытания образцов проводили следующим образом.

Извне и внутри образца создавалось давление  $p$ , затем внешнее давление оставалось без изменений, а внутри образец догружался избыточным давлением  $\Delta p$  до разрушения.

Значения  $p$  и  $\Delta p$  фиксировали, причём значению  $\Delta p$  соответствовало полное разрушение образца. Для обработки результатов испытаний применяли следующую методику.

Сначала определяли тангенциальное (окружное)  $\sigma_t^*$  и осевое  $\sigma_z^*$  напряжения в образцах при разрушении в предположении действия только избыточного внутреннего давления  $\Delta p$ .

Затем строили график, на оси абсцисс которого откладывали внешнее давление  $p$ , а на оси ординат – тангенциальное (окружное)  $\sigma_t^*$  и осевое  $\sigma_z^*$  напряжения.

Далее из начала координат проводили биссектрису первого квадранта (под углом  $45^\circ$  к оси абсцисс), пересекающую кривые  $\sigma_t^*$  и  $\sigma_z^*$ , и рассматривали предельные напряжённые состояния, которым на графике соответствовали точки пересечения этой биссектрисы с началом координат и с кривыми  $\sigma_t^*$  и  $\sigma_z^*$ . В начале координат  $p = 0$ , по уравнениям (4.28) и (4.30)  $\sigma_1 = 2\sigma_2$ ,  $\sigma_3 = 0$ , то есть напряжённое состояние двухосного растяжения, причём

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t^* = \Delta p v / w; \\ \sigma_2 &= \sigma_z^* = \Delta p v / (2w) = \sigma_t^* / 2; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = 0.\end{aligned}$$

В точке пересечения проведённой биссектрисы с кривой  $\sigma_z^*$  по уравнениям (4.28), (4.29) и (4.31) давлению  $p = \Delta p v / (2w)$  соответствовали напряжения чистого сдвига  $\sigma_1 = -\sigma_3$ ,  $\sigma_2 = 0$ :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t = p = \Delta p v / (2w); \\ \sigma_2 &= \sigma_z = 0; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -p = -\Delta p v / (2w).\end{aligned}$$

В точке пересечения этой биссектрисы с кривой  $\sigma_t^*$  по уравнениям (4.28), (4.29) и (4.32) действовали давление  $p = \Delta p v / w$  и напряжения двухосного сжатия, причём  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = 2\sigma_2$ :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t = 0; \\ \sigma_2 &= \sigma_z = -\Delta p v / (2w) = -p / 2; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -\Delta p v / w = -p.\end{aligned}$$

Таким образом, с учётом симметричности предельной кривой определены шесть точек, характеризующих напряжённые состояния во всех четырёх квадрантах – по две точки в первом и третьем квадрантах, где отражаются соответственно области двухосного растяжения и двухосного сжатия, и во втором и четвёртом квадрантах по одной точке, где имеет место чистый сдвиг.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 197/244

Испытания проводились на установке по схеме на рис. 4.5 при температуре 277 К.

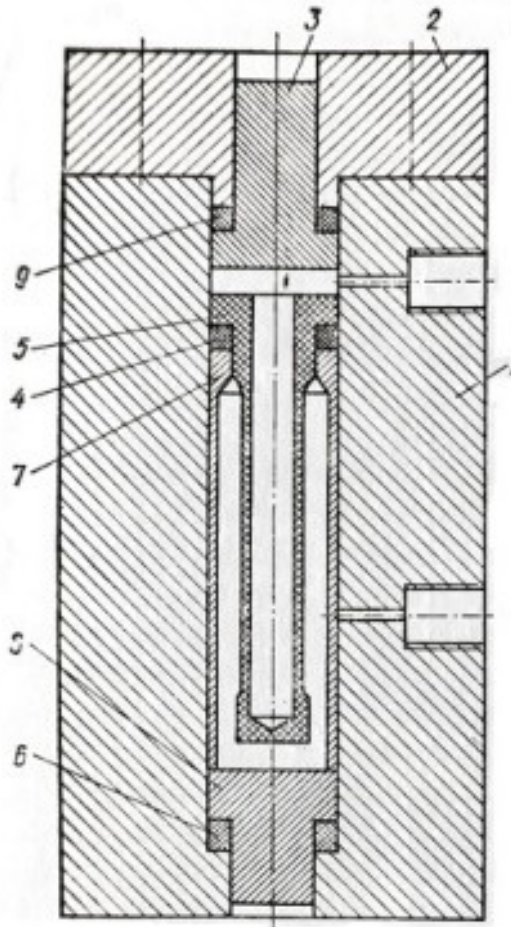


Рис. 4.5. Схема установки для испытания трубчатых образцов:  
1 – корпус; 2 – крышка; 3, 8 – заглушки; 4, 6, 9 – уплотнения;  
5 – образец; 7 – стакан.

Рисунок 4.5. Схема установки для испытания трубчатых образцов:

1 – корпус; 2 – крышка; 3, 8 – заглушки; 4, 6, 9 – уплотнения; 5 – образец; 7 – стакан.

Данные этих испытаний приведены в таблице 4.3, где в графе для  $\Delta p$  указаны средние арифметические значения для пяти испытанных при данном внешнем давлении  $p$  образцов.

Таблица 4.3. Данные испытаний предельных напряжённых состояний образцов из органического стекла.

| $p$ , МПа | $\Delta p$ , МПа | $\sigma_z^*$ опыт, МПа | $\sigma_t^*$ опыт, МПа | $\sigma_z^*$ теория, МПа | $\sigma_t^*$ теория, МПа | Расхождение, % |
|-----------|------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------|
| 0         | 5.70             | 34.2                   | 68.4                   | 35.4                     | 70.9                     | 3.6            |
| 50        | 6.40             | 38.4                   | 76.8                   | 38.7                     | 77.4                     | 0.8            |
| 100       | 7.42             | 44.5                   | 89.0                   | 42.0                     | 84.0                     | 5.7            |
| 150       | 7.80             | 46.8                   | 93.6                   | 45.2                     | 90.5                     | 3.3            |
| 200       | 8.16             | 49.0                   | 98.0                   | 48.5                     | 97.0                     | 1.0            |
| 250       | 8.25             | 49.5                   | 99.0                   | 51.8                     | 103.5                    | 4.6            |

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 198/244

По данным, приведённым в таблице 4.3, был построен рис. 4.6, из которого определено следующее.

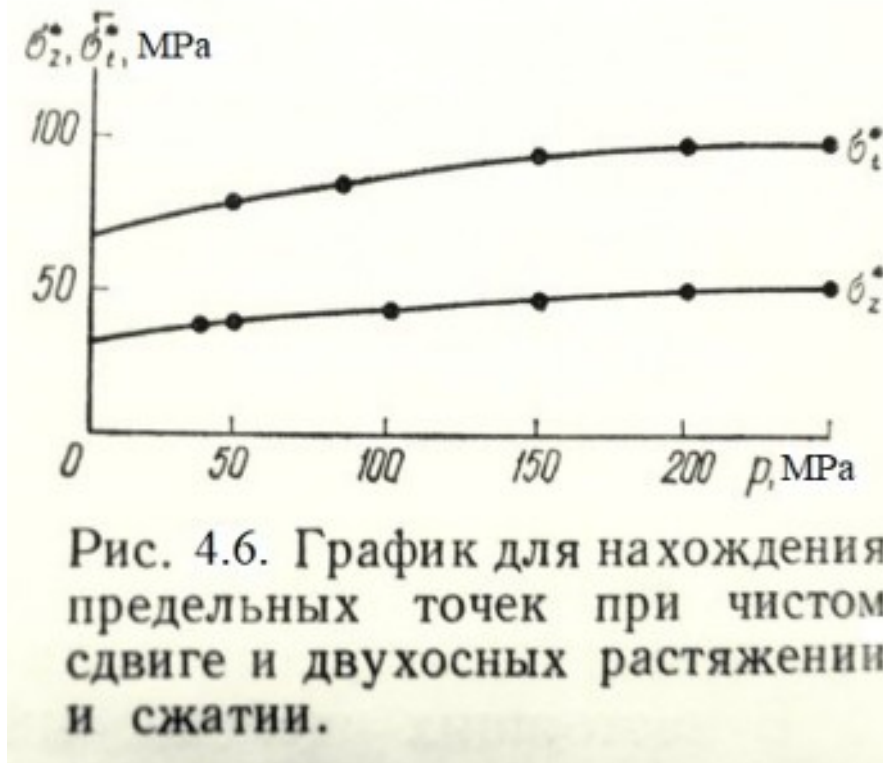


Рисунок 4.6. График для нахождения предельных точек при чистом сдвиге и двухосных растяжении и сжатии.

В начале координат  $p = 0$ , поэтому согласно уравнениям (4.28) и (4.30) такому давлению соответствовали напряжения разрушения

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2\sigma_2, \\ \sigma_3 &= 0,\end{aligned}$$

то есть в этой точке осуществилось напряжённое состояние двухосного растяжения, причём

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t^* = \Delta p v / w = 68.4 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= \sigma_z^* = \Delta p v / (2w) = \sigma_t^* / 2 = 34.2 \text{ МПа}; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = 0.\end{aligned}$$

В точке пересечения проведённой биссектрисы с кривой  $\sigma_z^*$  согласно уравнениям (4.28), (4.29) и (4.31) такому давлению  $p = \Delta p v / (2w)$  соответствовали напряжения чистого сдвига, причём

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\sigma_3, \\ \sigma_2 &= 0: \\ \sigma_1 &= \sigma_t = p = \Delta p v / (2w) = 39 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= \sigma_z = 0; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -p = -\Delta p v / (2w) = -39 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

В точке пересечения проведённой биссектрисы с кривой  $\sigma_t^*$  согласно уравнениям (4.28), (4.29) и (4.32) такому давлению  $p = \Delta p v / w$  соответствовали напряжения двухосного сжатия, причём

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0, \sigma_3 = 2\sigma_2: \\ \sigma_1 &= \sigma_t = 0; \\ \sigma_2 &= \sigma_z = -\Delta p v / (2w) = -p / 2 = -43 \text{ МПа}; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -p = -\Delta p v / w = -86 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Полученные экспериментальные данные позволили построить предельные линии (рис. 4.7).



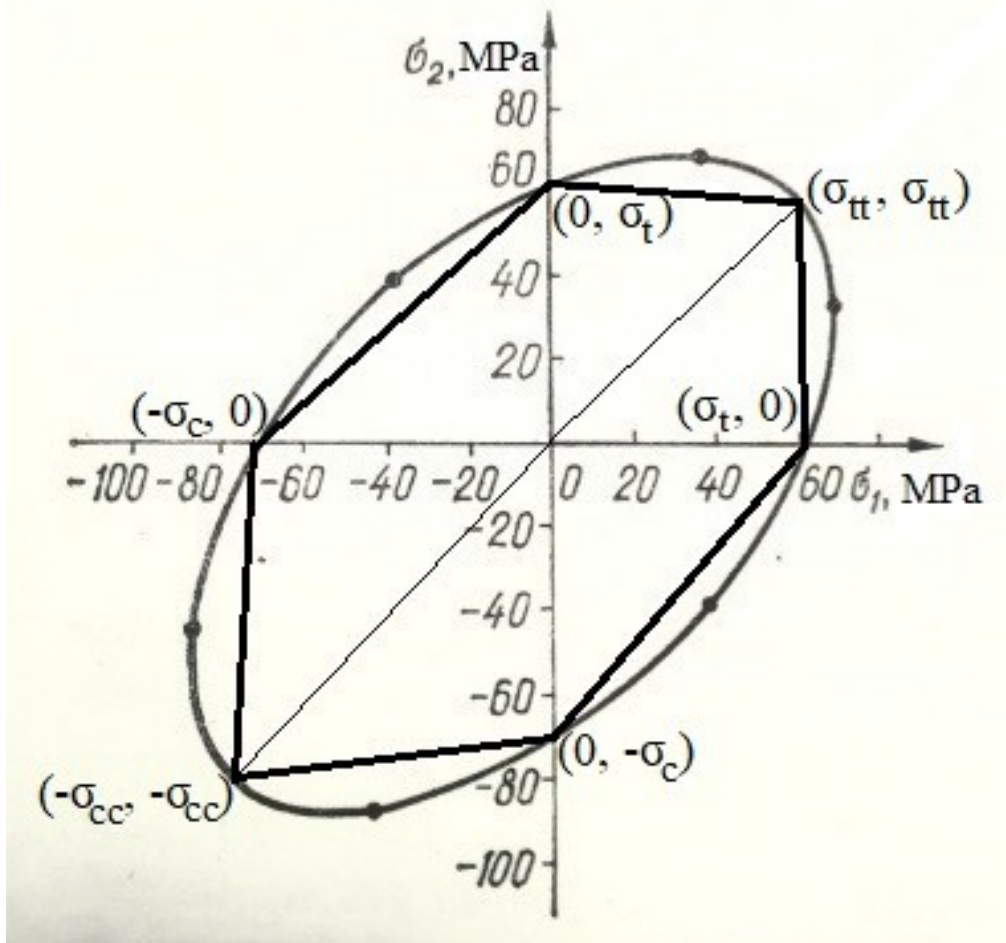


Рисунок 4.7. Предельная ломаная (по обобщению третьей теории прочности) и предельная кривая (по критерию Писаренко–Лебедева и по обобщению четвёртой теории прочности) органического стекла.

Для аналитического представления предельной кривой прочности органического стекла из широко применяемых критериев прочности [69, 107, 123, 151] выбран двухпараметрический критерий Писаренко–Лебедева.

С инженерной точностью подобные итоги даёт обобщение четвёртой теории прочности.

Анализ известных критериев прочности и практики их использования [69, 107, 123, 151] показывает, что для определения предельных состояний пластичных конструкционных материалов обычно применяются третья теория прочности (критерий наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

и четвёртая теория прочности (критерий удельной энергии формоизменения, или критерий октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_s,$$

а для определения предельных состояний хрупких материалов обычно применяются первая теория прочности (критерий наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе и критерий Кулона–Мора

$$\sigma_e = \sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_u,$$

где

$\sigma_e$  – эквивалентное одноосное напряжение;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) – главные напряжения в точке деформированного тела;

$\sigma_s, \sigma_u$  – предел текучести и предел прочности пластичного материала;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 200/244

$\sigma_t, \sigma_c$  – пределы прочности хрупкого материала при одноосных растяжении и сжатии;

$\chi$  – доля пластичности материала тела, при условии  $\sigma_t \leq \sigma_c$

$$\chi = \sigma_t / \sigma_c;$$

$1 - \chi$  – доля хрупкости материала тела.

Среди известных теорий и критериев прочности и предельных состояний наилучшие результаты даёт общая теория Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева о совместном влиянии сопротивления материала нормальным и сдвиговым нагрузкам на наступление предельного его состояния. Учёные предложили искать критерии прочности в виде инвариантных по отношению к напряжённому состоянию функций сдвиговых напряжений и наибольшего нормального напряжения, например наиболее известный критерий Писаренко–Лебедева

(4.33)

$$\sigma_e = (1 - \chi)\sigma_t + 2^{-1/2}\chi[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t.$$

В таблице 4.3 приведены ожидаемые значения напряжений разрушения  $\sigma_z^*$  теория и  $\sigma_t^*$  теория, определённые согласно выражениям (4.29) и (4.33), а также их относительные расхождения с данными эксперимента.

Общая теория и общие методы обобщения критериев предельных состояний и прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности, на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию

созданы и для исследований прочности и разрушения органического стекла при сложном напряжённом состоянии. Органическое стекло – изотропный пластичный материал, обычно считается одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию с единственным предельным напряжением, например текучести или прочности, и предельной поверхностью по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска или по четвёртой теории прочности (критерию удельной энергии формоизменения, или критерию октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки. Но опыты доказывают: органическое стекло явно лучше сопротивляется сжатию, чем растяжению, как и хрупкие материалы. Полезны общая теория и общие методы обобщения изотропного критерия предельных состояний  $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$  и прочности  $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_L$  для  $\sigma_L = \sigma_t = \sigma_c$  с однородной первого порядка функцией  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , для любого одноосного напряжения равной его модулю, на общий случай анизотропного материала с различными положительными одноосными пределами  $\sigma_{ij}$  при растяжении и  $\sigma_{ej}$  при сжатии в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) линейно-функциональным преобразованием главных напряжений  $\sigma_j$ , в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности:

$$\sigma_j = A_{j1}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{j2}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{j3}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{j0}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3') \quad (j = 1, 2, 3),$$

где  $A_{j1}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ ,  $A_{j2}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ ,  $A_{j3}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$  – безразмерные функции преобразованных главных напряжений  $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ , в частности постоянные;

$\sigma_{j0}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$  – имеющая размерность напряжения функция преобразованных главных напряжений  $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ , в частности постоянная.

Подстановки преобразований главных напряжений  $\sigma_j$  дают общие анизотропные критерии предельных состояний и прочности в преобразованных главных напряжениях  $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ :

$$\sigma_e = F(A_{11}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{12}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{13}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{10}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'), A_{21}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{22}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{23}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{20}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'), A_{31}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{32}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{33}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{30}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')) = \sigma_L;$$

$$\sigma_e = F(A_{11}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{12}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{13}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{10}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'), A_{21}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{22}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{23}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{20}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'), A_{31}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{32}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{33}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{30}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')) \leq \sigma_L.$$

В частности, прямой круговой цилиндр Мизеса может быть сделан эллиптическим и смещаться, а для анизотропного материала ещё и произвольно наклоняться.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 201/244

В частности, при плоском напряжённом состоянии  $\sigma_1, \sigma_3$  ( $\sigma_2 = 0$ ) изотропного материала с различными положительными одноосными пределами  $\sigma_t$  при растяжении и  $\sigma_c$  при сжатии по общему принципу допустимой простоты достаточно смещение предельной кривой другого изотропного материала с искомой одинаковой прочностью  $\sigma_L$  при растяжении и сжатии смещением начала координат вдоль главной диагонали в точку с искомыми одинаковыми при изотропии обеими координатами  $\sigma_0$ .

Для отличия от основной системы координат  $\sigma_1\sigma_3$  на плоскости главных напряжений применительно к предельной кривой изотропного материала с различными положительными одноосными пределами  $\sigma_t$  при растяжении и  $\sigma_c$  при сжатии достаточно снабдить штрихами главные напряжения  $\sigma_1'$  и  $\sigma_3'$  в соответствующей вспомогательной системе координат  $\sigma_1'\sigma_3'$  плоскости главных напряжений применительно к предельной кривой этого другого изотропного фиктивного материала с одинаковыми положительными одноосными пределами  $\sigma_L$  при растяжении и при сжатии. Тогда во вспомогательной системе координат  $\sigma_1'\sigma_3'$  координаты начала  $O$  основной системы координат  $\sigma_1\sigma_3$  составляют

$$\sigma_1' = \sigma_3' = \sigma_0.$$

Формулы взаимных переходов от одной системы координат к другой принимают вид

$$\sigma_1 = \sigma_1' - \sigma_0,$$

$$\sigma_3 = \sigma_3' - \sigma_0;$$

$$\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma_0,$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 + \sigma_0.$$

Во вспомогательной системе координат  $\sigma_1'\sigma_3'$  для определения предельных состояний этого другого изотропного фиктивного материала с одинаковыми положительными одноосными пределами  $\sigma_L$  при растяжении и при сжатии четвёртая теория прочности (критерий удельной энергии формоизменения, или критерий октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки даёт

$$2^{-1/2}[(\sigma_1' - \sigma_2')^2 + (\sigma_2' - \sigma_3')^2 + (\sigma_3' - \sigma_1')^2]^{1/2} = \sigma_L,$$

в плоском напряжённом состоянии  $\sigma_1', \sigma_3'$  ( $\sigma_2' = 0$ )

$$(\sigma_1'^2 - \sigma_1'\sigma_3' + \sigma_3'^2)^{1/2} = \sigma_L.$$

Тогда в основной системе координат  $\sigma_1\sigma_3$  искомое обобщение четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки для определения предельных состояний изотропного материала с различными положительными одноосными пределами  $\sigma_t$  при растяжении и  $\sigma_c$  при сжатии в плоском напряжённом состоянии  $\sigma_1, \sigma_3$  ( $\sigma_2 = 0$ ) даёт

$$[(\sigma_1 + \sigma_0)^2 - (\sigma_1 + \sigma_0)(\sigma_2 + \sigma_0) + (\sigma_2 + \sigma_0)^2]^{1/2} = \sigma_L,$$

$$[\sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_1 + \sigma_0^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_0(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_0^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_0\sigma_3 + \sigma_0^2]^{1/2} = \sigma_L,$$

$$[\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_0(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_0^2]^{1/2} = \sigma_L,$$

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_0(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_0^2 = \sigma_L^2.$$

Для получения искоемых выражений двух постоянных  $\sigma_L$  и  $\sigma_0$  через две постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем два опыта при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + \sigma_0\sigma_t + \sigma_0^2 = \sigma_L^2.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - \sigma_0\sigma_c + \sigma_0^2 = \sigma_L^2.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными даёт искомые значения обеих постоянных:

$$\sigma_0 = \sigma_c - \sigma_t,$$

$$\sigma_L^2 = \sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2.$$

Их подстановка в указанное последним критериальное уравнение предельной кривой при плоском напряжённом состоянии даёт:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)^2 &= \sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2, \\ \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3) &= \sigma_c \sigma_t. \end{aligned}$$

Это критериальное уравнение предельной кривой при плоском напряжённом состоянии является искомым обобщением такого уравнения по четвёртой теории прочности (критерию удельной энергии формоизменения, или критерию октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, получаемой в частном случае одинаковых  $\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ , даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_c$  и единой базой  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_c = [\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

Именно и только при квадратичном представлении исходного критерия предельных состояний смещение начала отсчёта аналитически выражается линейностью добавления, в данном случае при плоском напряжённом состоянии

$$(\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3),$$

в уравнение предельной поверхности, в данном случае при плоском напряжённом состоянии в уравнение предельной кривой.

В общем случае трёхосного напряжённого состояния использование указанных квадратичности представления классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, линейности добавления и равенства проекций смещения начала отсчёта на все оси координат пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений при изотропии материала приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3 + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = B.$$

Для получения искоемых выражений двух постоянных А и В через две постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем два опыта при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + A\sigma_t = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - A\sigma_c = B.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными даёт искомые значения обеих постоянных:

$$\begin{aligned} A &= \sigma_c - \sigma_t, \\ B &= \sigma_c \sigma_t. \end{aligned}$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В даёт:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_t.$$

Это обобщение классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, получаемой в частном случае одинаковых  $\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ , даёт принципиальную возможность учесть различие

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 203/244

сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_e = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

В своём классическом виде третья теория прочности (критерий наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_L$$

при упорядоченности главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  является линейной, а не квадратичной. Для общей теории и общих методов обобщения критериев предельных состояний и критериев прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности неквадратичность критерия предельных состояний не является ни малейшим препятствием. А вот общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции предварительно приводит критерии предельных состояний и критерии прочности к равносильному квадратичному виду.

Функция  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ввиду её сравнения с предельным напряжением  $\sigma_L$  в общем виде критерия предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

является однородной функцией первого порядка относительно всех трёх главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и для любого одноосного напряжения равна абсолютной величине этого напряжения.

Общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции предварительно приводит общий вид критерия предельных состояний  $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$  к равносильному квадратичному виду:

$$\sigma_e^2 = F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L^2.$$

В общем случае трёхосного напряжённого состояния использование указанных квадратичности представления общего вида критерия предельных состояний, линейности добавления и равенства проекций смещения начала отсчёта на все оси координат пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений при изотропии материала приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В:

$$F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = B.$$

Для получения искомого выражений постоянных А и В через постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем опыты при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + A\sigma_t = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - A\sigma_c = B.$$

Эта система двух уравнений даёт искомые значения обеих постоянных:

$$A = \sigma_c - \sigma_t,$$

$$B = \sigma_c \sigma_t.$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В даёт:

$$F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_t.$$

Это обобщение общего вида критерия предельных состояний даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений изотропного материала растяжению  $\sigma_t$  и

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 204/244

сжатия  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_e = [F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

Так что этим общим методом обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции можно воспользоваться и для третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска, которая предварительно приводится к равносильному квадратичному виду:

$$\sigma_e^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \sigma_L^2.$$

В общем случае трёхосного напряжённого состояния использование указанных квадратичности представления классической третьей теории прочности, линейности добавления и равенства проекций смещения начала отсчёта на все оси координат пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений при изотропии материала приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с двумя неопределёнными постоянными A и B:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = B.$$

Для получения искоемых выражений двух постоянных A и B через две постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем два опыта при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + A\sigma_t = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - A\sigma_c = B.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными даёт искоемые значения обеих постоянных:

$$A = \sigma_c - \sigma_t,$$

$$B = \sigma_c \sigma_t.$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с двумя неопределёнными постоянными A и B даёт:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_t.$$

Это обобщение классической третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска, получаемой в частном случае одинаковых  $\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ , даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений изотропного материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_e = [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

Для аналитического определения изображённой на рисунке 4.7 соответствующей плоскому напряжённому состоянию предельной ломаной кусочно-линейного обобщения классической третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска достаточно указать координаты всех шести вершин ломаной. Четыре вершины на осях координат соответствуют предельным одноосным растяжениям и сжатиям и имеют координаты

$$(\sigma_t, 0), (0, \sigma_t), (-\sigma_c, 0), (0, -\sigma_c).$$

Одна вершина предельного шестиугольника на главной диагонали в первом квадранте соответствует искомому равному двухосному растяжению

$$\sigma_1 = \sigma_{tt}, \sigma_2 = \sigma_{tt}, \sigma_3 = 0 (\sigma_{tt} > 0).$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 205/244

Искомые равные непременно строго положительные координаты этой вершины ( $\sigma_{tt}$ ,  $\sigma_{tt}$ ) удовлетворяют достигнутому обобщению

$$\sigma_c = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2}$$

классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c\sigma_t,$$

$$\sigma_{tt}^2 + \sigma_{tt}^2 - \sigma_{tt}^2 + 2(\sigma_c - \sigma_t)\sigma_{tt} = \sigma_c\sigma_t,$$

$$\sigma_{tt}^2 + 2(\sigma_c - \sigma_t)\sigma_{tt} - \sigma_c\sigma_t = 0,$$

$$\sigma_{tt} = -(\sigma_c - \sigma_t) + [(\sigma_c - \sigma_t)^2 + \sigma_c\sigma_t]^{1/2} = (\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} - (\sigma_c - \sigma_t) > 0,$$

поскольку

$$\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2 - (\sigma_c - \sigma_t)^2 = \sigma_c\sigma_t > 0.$$

Если

$$\sigma_t \leq \sigma_c,$$

то

$$\sigma_{tt} \leq \sigma_t$$

и внутренний угол предельного шестиугольника при этой его вершине является прямым или тупым, причём прямым вместе с равенством

$$\sigma_{tt} = \sigma_t$$

именно и только при равенстве

$$\sigma_t = \sigma_c,$$

а тупым вместе со строгим неравенством

$$\sigma_{tt} < \sigma_t$$

именно и только при строгом неравенстве (что и имеет место для органического стекла и показано на рисунке 4.7)

$$\sigma_t < \sigma_c,$$

поскольку равносильны следующие нестрогие неравенства и отдельно строгости и нестрогости в них:

$$(\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} - (\sigma_c - \sigma_t) \leq \sigma_t,$$

$$(\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} \leq \sigma_c,$$

$$\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2 \leq \sigma_c^2,$$

$$\sigma_t^2 \leq \sigma_c\sigma_t,$$

$$\sigma_t \leq \sigma_c.$$

А если

$$\sigma_t \geq \sigma_c,$$

то

$$\sigma_{tt} \geq \sigma_t$$

и внутренний угол предельного шестиугольника при этой его вершине является прямым или острым, причём прямым вместе с равенством

$$\sigma_{tt} = \sigma_t$$

именно и только при равенстве

$$\sigma_t = \sigma_c,$$

а острым вместе со строгим неравенством

$$\sigma_{tt} > \sigma_t$$

именно и только при строгом неравенстве (что встречается у магниевых сплавов)

$$\sigma_t > \sigma_c,$$

поскольку равносильны следующие нестрогие неравенства и отдельно строгости и нестрогости в них:

$$(\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} - (\sigma_c - \sigma_t) \geq \sigma_t,$$

$$(\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} \geq \sigma_c,$$

$$\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2 \geq \sigma_c^2,$$

$$\sigma_t^2 \geq \sigma_c\sigma_t,$$

$$\sigma_t \geq \sigma_c.$$

Одна вершина предельного шестиугольника на главной диагонали в третьем квадранте соответствует искомому равному двухосному сжатию

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -\sigma_{cc}, \sigma_3 = -\sigma_{cc} (\sigma_{cc} > 0).$$

Искомые равные непременно строго отрицательные координаты этой вершины  $(-\sigma_{cc}, -\sigma_{cc})$  при строго положительном  $\sigma_{cc}$  удовлетворяют достигнутому обобщению

$$\sigma_c = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2}$$

классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c\sigma_t,$$

$$\sigma_{cc}^2 + \sigma_{cc}^2 - \sigma_{cc}^2 - 2(\sigma_c - \sigma_t)\sigma_{cc} = \sigma_c\sigma_t,$$

$$\sigma_{cc}^2 - 2(\sigma_c - \sigma_t)\sigma_{cc} - \sigma_c\sigma_t = 0,$$

$$\sigma_{cc} = \sigma_c - \sigma_t + [(\sigma_c - \sigma_t)^2 + \sigma_c\sigma_t]^{1/2} > 0,$$

поскольку

$$\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2 - (\sigma_c - \sigma_t)^2 = \sigma_c\sigma_t > 0.$$

Если

$$\sigma_t \leq \sigma_c,$$

то

$$\sigma_{cc} \geq \sigma_c > 0$$

и внутренний угол предельного шестиугольника при этой его вершине является прямым или острым, причём прямым вместе с равенством

$$\sigma_{cc} = \sigma_c$$

именно и только при равенстве

$$\sigma_t = \sigma_c,$$

а острым вместе со строгим неравенством

$$\sigma_{cc} > \sigma_c$$

именно и только при строгом неравенстве (что и имеет место для органического стекла и показано на рисунке 4.7)

$$\sigma_t < \sigma_c,$$

поскольку равносильны следующие нестрогие неравенства и отдельно строгости и нестрогости в них:

$$\sigma_c - \sigma_t + [(\sigma_c - \sigma_t)^2 + \sigma_c\sigma_t]^{1/2} \geq \sigma_c,$$

$$(\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} \geq \sigma_t,$$

$$\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2 \geq \sigma_t^2,$$

$$\sigma_c^2 \geq \sigma_c\sigma_t,$$

$$\sigma_c \geq \sigma_t.$$

А если

$$\sigma_t \geq \sigma_c,$$

то

$$\sigma_{cc} \leq \sigma_c$$

и внутренний угол предельного шестиугольника при этой его вершине является прямым или тупым, причём прямым вместе с равенством

$$\sigma_{cc} = \sigma_c$$

именно и только при равенстве

$$\sigma_t = \sigma_c,$$

а тупым вместе со строгим неравенством

$$\sigma_{cc} < \sigma_c$$

именно и только при строгом неравенстве (что встречается у магниевых сплавов)

$$\sigma_t > \sigma_c,$$

поскольку равносильны следующие нестрогие неравенства и отдельно строгости и нестрогости в них:

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 207/244

$$\begin{aligned}\sigma_c - \sigma_t + [(\sigma_c - \sigma_t)^2 + \sigma_c \sigma_t]^{1/2} &\leq \sigma_c, \\ (\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} &\leq \sigma_t, \\ \sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2 &\leq \sigma_t^2, \\ \sigma_c^2 &\leq \sigma_c \sigma_t, \\ \sigma_c &\leq \sigma_t.\end{aligned}$$

Простота этих общих методов обобщения критериев предельных состояний и прочности и самих обобщённых критериев – их большие принципиальные преимущества.

Именно поэтому столь прост и естествен рисунок 4.7.

В итоге обработки экспериментальных данных о предельной поверхности органического стекла методом наименьших квадратов получены

$$\sigma_t = 62.5 \text{ МПа}, \sigma_c = 70.8 \text{ МПа}, \chi = 0.883.$$

Следует заметить, что критерий Писаренко–Лебедева, обобщение третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска и обобщение четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки можно применять и при объёмном напряжённом состоянии с использованием полученных постоянных органического стекла

$$\sigma_t = 62.5 \text{ МПа}, \sigma_c = 70.8 \text{ МПа}, \chi = 0.883.$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что прочность органического стекла в области сжатия несколько выше, чем при растяжении.

Поэтому на первый взгляд кажется, что при конструировании изделий из органического стекла необходимо стремиться к тому, чтобы материал работал именно в области сжатия.

Однако опыт проектирования и использования изделий из органического стекла показывает, что при действии напряжений, близких к пределу прочности на сжатие, происходит нарушение структуры материала, при последующих нагружениях приводящее к появлению трещины, а также возникновению «серебра» [82], нарушающего оптическую прозрачность изделия.

Поэтому, несмотря на то, что сжатие – более предпочтительный вид напряжённого состояния, чем растяжение и сдвиг, напряжений сжатия, близких к предельным, в конструкциях из органического стекла допускать нельзя.

#### **4.5. Открытие системы принципиальных изъянов абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов и создание теорий всеобщей погрешности, псевдорешений и взвешивания данных с итерационным общим методом наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, для исследования прочности неорганического стекла при повторно-статическом нагружении**

По инициативе А. А. Каминского были выполнены экспериментальные исследования прочности и разрушения неорганического стекла при повторно-статическом нагружении и на основе рассмотрения энергетического баланса при разрушении опёртой по краю круглой пластины из неорганического стекла радиусом  $a$  и толщиной  $h$  под действием гидростатического давления  $p$  с использованием классического решения теории пластин [164–166] установлена зависимость между разрушающими напряжениями в стекле и числом трещин  $n$  [115]. Уравнение энергетического баланса имеет вид:

$$W_{\text{whole}} - W_{\text{parts}} = W_u,$$

где

$W_{\text{whole}}$  – потенциальная энергия изогнутой пластины, численно равная работе, затраченной на изгиб пластины,

$$W_{\text{whole}} = \pi p \int_0^a w(r) r dr;$$

$W_{\text{parts}}$  – потенциальная энергия образовавшихся осколков;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 208/244

$W_u$  – работа, затраченная на образование трещин при разрушении;

$r, w(r)$  – текущие радиус и прогиб пластины соответственно.

Разрушение пластины происходит с образованием радиальной системы трещин. Образовавшиеся осколки имеют потенциальную энергию, которая тратится на восстановление их первоначальной формы.

Если принять, что прогиб изменяется по линейному закону, то получим:

$$W_{\text{whole}} - W_{\text{parts}} = \pi r \int_0^a w_0 (1 - r/a) r dr.$$

После подстановки

$$p = 8[3(3 + \mu)]^{-1} (h/a)^2 \sigma_t, \\ w_0 = (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^4/h^3$$

получаем:

$$W_{\text{whole}} - W_{\text{parts}} = (\pi/32)(1 - \mu)(5 + \mu)(p^2/E)a^6/h^3,$$

где

$E$  – модуль продольной упругости Юнга;

$\mu$  – коэффициент поперечной деформации Пуассона;

$\sigma_t$  – разрушающее растягивающее напряжение.

Работа, затраченная на образование трещин при разрушении, составляет

$$W_u = 2nahq,$$

где

$n$  – число сквозных трещин;

$q$  – энергия, необходимая для образования единицы свободной поверхности (плотность поверхностной энергии), являющаяся универсальной постоянной стекла,

$$q = 1.95 \cdot 10^{-5} \text{ МПа} \cdot \text{м}.$$

После соответствующих преобразований получим:

$$\sigma_t = 3\pi^{-1/2}(3 + \mu)(1 - \mu)^{-1/2}(5 + \mu)^{-1/2}(Eq)^{1/2}(n/a)^{1/2} = B(n/a)^{1/2}.$$

По имеющимся экспериментальным данным было установлено для стекла К8 значение

$$B = 3.34 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Таким образом, подтверждено, что зависимость между числом трещин и разрушающим напряжением носит вполне определённый характер, однако зависит не только от механических характеристик материала, как считалось ранее, но и от геометрических характеристик тела в направлении развития трещин.

Автор создал общий (полу)степенной метод решения осесимметричной упругой задачи, позволивший впервые получать именно аналитические решения нетривиальных задач для существенно трёхмерных сплошных цилиндрических упругих тел с глубокими обобщениями и принципиальными уточнениями теории плит и теории пластин, в том числе для указанной опёртой по краю круглой пластины, что создало научные основы оценки, обобщения и развития исследований данного раздела, и выполнил соответствующие теоретические исследования зависимости числа циклов повторно-статического нагружения от разрушающего напряжения.

В табл. 4.4 приведены результаты разрушающих испытаний ряда типоразмеров стеклоэлементов, а также расчётов разрушающих напряжений  $\sigma_t$ , значения которых определялись как по разрушающему давлению  $p_u$

$$(\sigma_t(p) = \sigma_{up}),$$

так и по числу трещин  $n$

$$(\sigma_t(n) = \sigma_{un})$$

с использованием универсальной постоянной стекла

$$q = 1.95 \cdot 10^{-5} \text{ МПа} \cdot \text{м}$$

и постоянной

$$B = 3.34 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2},$$

универсальность которой для стеклянных пластин показана не только теоретически, но и экспериментально.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 209/244

Таблица 4.4. Сопоставление значений разрушающего напряжения, определённых по разрушающему давлению или по числу трещин в стеклоэлементах.

| № п/п | Радиус стеклоэлемента а, мм | Толщина стеклоэлемента h, мм | Разрушающее давление $p_u$ , МПа | Число трещин n | Постоянная В, МПа*м <sup>1/2</sup> | Разрушающее напряжение                       |                                     |
|-------|-----------------------------|------------------------------|----------------------------------|----------------|------------------------------------|--|-------------------------------------|
|       |                             |                              |                                  |                |                                    | по разрушающему давлению $\sigma_{up}$ , МПа | по числу трещин $\sigma_{un}$ , МПа |
| 1     | 27.5                        | 3.0                          | 1.2                              | 33             | 3.47                               | 121.0  | 115.7                               |
| 2     | 35.0                        | 7.0                          | 2.0                              | 12             | 3.24                               | 60.0   | 62.0                                |
| 3     | 35.0                        | 7.0                          | 2.5                              | 19             | 3.21                               | 75.0   | 77.7                                |
| 4     | 40.0                        | 10.0                         | 8.0                              | 82             | 3.40                               | 154.0  | 151.4                               |

Явление снижения прочности при повторных приложениях нагрузки присуще большинству конструкционных материалов.

При проектировании изделий это явление учитывается соответствующим снижением значений допускаемых напряжений.

В связи с этим для многих материалов в литературе имеются данные, позволяющие определить допускаемые напряжения в зависимости от требуемого ресурса работоспособности.

Опыт использования стекла в качестве конструкционного материала ещё невелик, и данных, позволяющих учесть это явление в конструкциях из стекла, крайне недостаточно.

Работоспособность высоконапряжённых светопрозрачных элементов должна быть обеспечена при 200–300 циклах нагружения.

Для изучения основных закономерностей разрушения стекла при действии повторно-статических нагрузок были проведены испытания, результаты которых позволяют в некоторой степени оценить надёжность стеклянных изделий, а также выбрать допускаемые напряжения для стекла.

В качестве образцов использовались круглые пластины, опёртые по краю, нагружаемые равномерным давлением, что позволило создать в наиболее опасной точке двухосное растяжение. Радиус пластины  $a = 35$  мм, толщина  $h = 7$  мм, материал – стекло К8.

Рассмотрим напряжённое состояние образцов.

Согласно [164–166] равносильное (эквивалентное)  $\sigma_c(r, z)$  по третьей и четвёртой теориям прочности, радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения максимальны и одинаковы в центре поверхности низкого давления, где осевое напряжение  $\sigma_z(r, z) = 0$ :

$$(4.34)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_c(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0) = (3/8)(3 + \mu)pa^2/h^2.$$

В этом случае трещины располагаются вдоль прямых линий, проходящих через центр пластины, то есть образуется радиальная система трещин.

Таким образом, напряжение (4.34) пластины в центре поверхности низкого давления можно считать разрушающим.

Вывод о том, что при разрушении именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания без бокового давления, образуется радиальная система трещин, можно использовать при анализе разрушенных образцов.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 210/244

Если образовавшаяся система трещин значительно отличается от радиальной, то либо образец имел дефект, в результате которого разрушение началось не в предполагаемой точке, либо условия опирания образца не соответствовали принятым вследствие попадания на контактную поверхность осколков, других посторонних предметов, вызывающих неравномерность распределения контактных усилий, либо и то, и другое.

Нагружение образцов проводили на специальной установке с помощью плунжерного насоса. Первыми были испытаны три образца до разрушения однократно прилагаемыми нагрузками. Давления разрушения составили соответственно 2.1; 2.0; 2.0 МПа.

После этого давления нагружения были снижены и дальнейшие испытания проводили повторяющимися нагрузками.

Цикл изменения нагрузки состоял из подъёма давления до заданного значения со скоростью 0.3 МПа/мин, выдержки при этом давлении в течение 10 с, сброса давления со скоростью 2 МПа/мин и выдержки в течение 30 с, после чего цикл повторялся.

Число циклов до разрушения фиксировали.

Результаты испытаний приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5. Данные испытаний прочности и разрушения неорганического стекла К8 при повторно-статическом нагружении.

| Давление разрушения $p$ , МПа | Число циклов нагрузки до разрушения $n$ | Напряжение разрушения $\sigma$ , МПа | Показательное приближение числа $n$ циклов $n_1(\sigma)$ | Среднее степенное приближение числа $n$ циклов $n_2(\sigma)$ | Крайнее степенное приближение числа $n$ циклов $n_3(\sigma)$ |
|-------------------------------|---|--------------------------------------|--|--|--|
| 2.1                           | 1                                       | 63                                   | 0.55   | 0.89   | 0.74   |
| 2.0                           | 1                                       | 60                                   | 1  | 1.10   | 1  |
| 2.0                           | 1                                       | 60                                   | 1  | 1.19   | 1  |
| 1.8                           | 2                                       | 54                                   | 2.4  | 2.23   | 1.91   |
| 1.4                           | 6                                       | 42                                   | 13.6   | 9.99   | 8.94   |
| 1.4                           | 7                                       | 42                                   | 13.6   | 9.99   | 8.94   |
| 1.2                           | 14                                      | 36                                   | 32.4   | 25   | 23   |
| 1.2                           | 56                                      | 36                                   | 32.4   | 25   | 23   |
| 1.2                           | 87                                      | 36                                   | 32.4   | 25   | 23   |
| 1.1                           | 49                                      | 33                                   | 50.1   | 42   | 39.3   |
| 1.1                           | 20                                      | 33                                   | 50.1   | 42   | 39.3   |
| 1.0                           | 45                                      | 30                                   | 77.4   | 74   | 70.5   |
| 1.0                           | 88                                      | 30                                   | 77.4   | 74   | 70.5   |
| 1.0                           | 107                                     | 30                                   | 77.4   | 74   | 70.5   |
| 1.0                           | 120                                     | 30                                   | 77.4   | 74   | 70.5   |
| 0.9                           | 25                                      | 27                                   | 120  | 139  | 134  |
| 0.8                           | 237                                     | 24                                   | 185  | 280  | 278  |
| 0.8                           | 325                                     | 24                                   | 185  | 280  | 278  |

Разрушение образцов происходило либо при подъёме давления, либо при его выдержке.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 211/244

В одних случаях образец с образовавшейся системой трещин оставался на месте, в других – осколки с небольшой скоростью выбрасывались в полость низкого давления, практически не разбиваясь дополнительно, о чём свидетельствует сохранившаяся форма секторов.

Степень дробности разрушения была также различной.

После разрушения образцов осколки собирали и анализировали картину разрушения.

Система образовавшихся трещин большинства образцов была близка к радиальной.

Приемлемыми считались такие результаты, при которых центр системы трещин был смещён от геометрического центра диска не более чем на четверть радиуса, тогда как остальные результаты отбрасывались.

В таблицу 4.5 не внесены результаты испытания образцов, которые разрушились со значительным смещением центра системы трещин.

Однако, несмотря на принятую методику, разброс результатов получился значительным, что можно объяснить тем, что хотя образцы и не имели видимых дефектов, но микротрещины на их поверхностях имели различные размеры.

Как видно из формулы Гриффитса

$$\sigma_{кр} = 2(Eq/(\pi L))^{1/2},$$

где  $\sigma_{кр}$  – критическое напряжение;

$q$  – плотность поверхностной энергии;

$L$  – длина трещины,

напряжения зависят от размеров микротрещин, и разрушающие напряжения зависят от состояния поверхностей образцов.

Однако, поскольку при работе возможно соприкосновение стекла с различными телами и абразивными частицами, а следовательно, повреждение поверхности, полученные результаты приемлемы для практического использования.

При обработке результатов разрушающие напряжения определяли в центре пластины, так как при смещении точки начала разрушения на четверть радиуса от центра пластины погрешность в определении радиального и тангенциального (окружного) напряжений не превышает 5 %.

Для аналитического представления полученных результатов использованы показательная и степенная функции.

Открыты нечёткость приближённости и целые системы вопиющих принципиальных изъянов абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов и создан итерационный общий метод наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, в том числе для теоретических и экспериментальных исследований прочности и разрушения неорганического стекла при повторно-статическом нагружении.

Открыто и доказано, что само понятие приближения, в частности приближённого отношения, в том числе приближённого равенства, не универсально, условно, субъективно и является нечётким и плохо определённым, что доказывается возможностью сколь угодно малого различия между приближением и неприближением при любой попытке добиться именно чёткого их различия между собой (как парадокс неустранимого противоречия между непрерывностью погрешности и дискретностью, а именно грубейшей двоичностью, классификации). Он даже бесконечно сильнее связанного с неопределённостью понятия кучи дважды различно дискретного знаменитого древнегреческого парадокса кучи: одно зерно не составляет кучи зерна, два зерна не составляют кучи зерна, и так далее, миллион зёрен составляют кучу зерна; какое именно по счёту зерно делает ещё не кучу зерна уже кучей зерна). Действительно, если для определённости, простоты и наглядности примера ориентироваться, скажем, на инженерную точность, а именно на допускаемую инженерную относительную погрешность 10 %, и полагать вначале, что левая часть отношения меньше единичной правой части, то на первом этапе с шагом длиной  $1/10^1$  отношение  $0.9 \approx 1$  ещё можно считать именно приближением, в данном случае приближённым равенством, и использовать указанный знак  $\approx$  приближённого равенства. А вот отношение  $0.8 \neq 1$  уже

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 212/244

нельзя считать именно приближением, в данном случае приближённым равенством, и нельзя использовать знак  $\approx$  приближённого равенства, так что приходится считать отношение  $0.8 \neq 1$  неприближением, просто неравенством и использовать указанный знак  $\neq$  неравенства. То есть на примере этих двух отношений модуль разности приближения и неприближения на первом этапе составляет  $|0.9 - 0.8| = 1/10^1$ . На втором этапе отрезок  $[0.8, 0.9]$  разбивается на 10 шагов длиной  $1/10^2$  и выбирается тот шаг, который от неприближения ведёт к приближению. Если продолжать настаивать ровно на десяти процентах допустимой относительной погрешности, то это шаг  $[0.89, 0.9]$ . То есть модуль разности приближения и неприближения на втором этапе составляет  $|0.9 - 0.89| = 1/10^2$ . Продолжая этот процесс далее, получаем на этапе с номером n шаг  $[0.9 - 1/10^n, 0.9]$  длиной  $1/10^n$  и модуль разности приближения и неприближения  $|0.9 - (0.9 - 1/10^n)| = 1/10^n$ , систему вложенных отрезков с единственной неподвижной точкой 0.9 и сколь угодно малый шаг между неприближением и приближением. Если, наоборот, полагать, что левая часть отношения больше единичной правой части, то аналогично получится единственная неподвижная точка 1.1. В итоге для нестрогой (включающей и точность) приближённости отношения с наперёд заданной единичной правой частью и наперёд заданной относительной погрешностью 10 % необходима и достаточна, что естественно, принадлежность левой части отношения отрезку  $[0.9, 1.1]$ , причём сколь угодно малый выход левой части отношения за пределы этого отрезка ведёт к переходу от приближения к неприближению. На произвольный общий случай любой пары действительных значений этот частный пример обобщается очевидным линейным преобразованием, чем и завершается доказательство.

Полезно обобщить отношения дизъюнктивными или конъюнктивными соединениями знаков отношений и/или модификаторов отношений с известными дизъюнктивными частными случаями  $\leq$  ( $\leq$ ) и  $\geq$  ( $\geq$ ). В частности, произвольное отношение R конъюнктивно обобщается формальным (проблематичным; верным или неверным) отношением R? с добавлением вопрошающего (формализующего, проблематизирующего, вводящего независимость от осуществления, истинности) модификатора ?, например справа или слева на том же уровне или нижним либо верхним указателем (индексом). В частности, отношение = равенства обобщается отношением =? приравнивания (формального, проблематичного равенства, верного или неверного). А отношения  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  строгого или нестрогого неравенства обобщаются отношениями  $<?$ ,  $>?$ ,  $\leq?$ ,  $\geq?$  формального (проблематичного, верного или неверного) строгого или нестрогого неравенства соответственно. Полезными примерами дизъюнктивных соединений знаков отношений являются  $<\approx$ ,  $=\approx$ ,  $>\approx$ .

Абсолютная погрешность формального (условного, независимого от истинности, что обозначается знаком вопроса, в данном случае после знака равенства) приравнивания сама по себе недостаточна для выражения и оценивания качества приближения и к тому же не однозначна (не является инвариантом), так как при равносильном умножении формального (условного, независимого от истинности) приравнивания на ненулевое число умножается на его абсолютную величину:

$$\Delta_{1000=?999} = \Delta_{1=?0} = 1, \\ \Delta_{10=?0} = 10.$$

Относительная погрешность принципиально не соответствует своему замыслу о собственных пределах между нулём и единицей, нелогична в смысле произвольного выхватывания лишь одного элемента равенства для модуля в знаменателе, необоснованна в смысле игнорирования необходимого (для осуществления своего замысла) неравенства треугольника, а поэтому неправильна, определена лишь для двухэлементного формального (условного, независимого от истинности) приравнивания, для него двузначна (двусмысленна), вопреки замыслу может превышать единицу и быть бесконечной и вообще неопределённой при большем двух числе элементов приравнивания (в последних двух примерах ниже):

$$\delta_{a=?b, a} = \|a - b\|/\|a\| \neq \|a - b\|/\|b\| = \delta_{a=?b, b},$$

$$\delta_{1 \neq 0, 0} = 1/0 = \infty,$$

$$\delta_{1 \neq -1, 1} = \delta_{1 \neq -1, -1} = 2,$$

$$\delta_{100 - 99 \neq 0} ?, \delta_{1 - 2 + 3 - 4 \neq -1} ?$$

При этом относительная погрешность никоим образом не отрицается, напротив, именно правильно используется в пределах её применимости. В частности, здесь показано избавление относительной погрешности от её двусмысленности посредством параметризации выбранным выражением а или b для модуля (нормы) в знаменателе. Для двухэлементного формального равенства  $a \neq b$  это даёт взамен единственной двусмысленной относительной погрешности  $\delta$  две (по числу элементов формального равенства) различные однозначные относительные погрешности  $\delta_{a \neq b, a}$  и  $\delta_{a \neq b, b}$  при сохранении остальных указанных недостатков.

Классический метод наименьших квадратов Лежандра и Гаусса является простейшим и по существу единственным широко применяемым в классической математике для решения переопределённых задач, в которых количество уравнений больше количества неизвестных, однако обладает целым рядом принципиальных изъянов и пороков и крайне узкими областями применимости и тем более приемлемости и пригодности:

1) не пригоден при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи. Например, если одно из уравнений решаемой их совокупности как бесструктурной системы составлено на основе закона сохранения энергии, а другое уравнение той же совокупности составлено на основе закона сохранения импульса, или количества движения, то предусмотренная методом наименьших квадратов сумма квадратов разностей частей всех уравнений совокупности лишена всякого смысла. Разумеется, можно предварительно привести все уравнения решаемой их совокупности к одной физической размерности, общей для всех этих уравнений. Однако такое приведение может быть выполнено разными способами. Например, уравнение на основе закона сохранения энергии можно разделить на скорость или на её половину, можно разделить на одну скорость, а можно и на другую скорость. Но итог по методу наименьших квадратов более чем существенно зависит от способа такого приведения решаемой совокупности уравнений к физической размерности, общей (единой) для всех этих уравнений, и поэтому вообще лишён объективного смысла;

2) неинвариантен, меняет не проверяемый итог при равносильных преобразованиях решаемой задачи, например переопределённой системы двух уравнений в разрешённом виде – первоначальной, с умножением только первого уравнения на 10 и с умножением только второго уравнения на 10, причём в обоих последних случаях итог приближается к точному решению одного лишь умножаемого на 10 уравнения:

$$x = 1 \wedge x = 2 \rightarrow x = 3/2;$$

$$10x = 10 \wedge x = 2 \rightarrow x = 102/101;$$

$$x = 1 \wedge 10x = 20 \rightarrow x = 201/101;$$

3) необоснованно полагается, как и математическая статистика, на абсолютную погрешность и аналитически простейшую вторую степень усреднения;

4) неустойчив к наклону (изображения на координатной плоскости к оси абсцисс) системы данных (с разбросом) и приближающей её прямой или кривой, к вращению системы данных (с разбросом), способен почти игнорировать значительную и даже преимущественную часть решаемой задачи, минимизирует сумму квадратов отклонений, например разностей частей уравнений их системы, и поэтому на самом деле опирается именно на самые худшие сохраняемые данные (ещё и с субъективизмом и нечёткостью разделения всех данных на сохраняемые и учитываемые данные и на удаляемые и полностью игнорируемые выбросы) с их преимущественным вкладом в эту сумму и пренебрегает самыми лучшими данными с их ничтожным вкладом в эту сумму, а возведение в квадрат резко усиливает эти различия вкладов соответствующих отклонений, так что метод наименьших квадратов часто ведёт к предсказуемым неприемлемости, извращениям и парадоксам:

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 214/244

приближение  $y = kx$  двух точек  $(1, 1)$ ,  $(10, 15)$  на координатной плоскости даёт парадоксальное сочетание большей абсолютной погрешности  $\Delta_{(1, 1)}$  приближения малых данных и меньшей абсолютной погрешности  $\Delta_{(10, 15)}$  приближения больших данных:

$$\begin{aligned} k &= 151/101, \\ \Delta_{(1, 1)} &= 51/101, \\ \Delta_{(10, 15)} &= 5/101; \end{aligned}$$

5) не предусматривает никакого улучшения получаемого не оцениваемого псевдорешения, а просто объявляет его единственно возможным наподобие истины в последней инстанции.

Условно пригодная, не универсальная, нелогичная, двусмысленная, вопреки замыслу могущая превышать единицу и быть неограниченной относительная погрешность как метод оценивания математически строго проанализирована, исправлена и для любого математического моделирования обобщена безусловно пригодной, универсальной, логичной, однозначной, по замыслу всегда в пределах от нуля до единицы благодаря неравенству треугольника всеобщей погрешностью как методом оценивания.

Дополнительно к верно используемой в пределах применимости относительной погрешности в настоящей диссертации как инвариантная мера неточности, правильно обобщающей нечёткую приближённость, введена всеобщая погрешность со значениями на отрезке  $[0, 1]$ , в частности линейная, квадратичная и с максимумом, с учётом частного случая неравенства Коши–Буняковского для знаменателей и с введённым альтернативным делением

$$\begin{aligned} E_{a \approx b} &= \|a - b\| / (\|a\| + \|b\|) \geq E_{a \approx b, Q} = \|a - b\| / [2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2} \geq E_{a \approx b, M} = \|a - b\| / (2 \max\{\|a\|, \|b\|\}) \\ ((a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2), a_i = \|A_i\|, b_i = 1, i = 1, 2, \dots, n; \\ c//d &= c/d \text{ при } c \neq 0; c//d = 0 \text{ при } c = 0 \text{ и любом } d, \text{ даже нулевым или не существующем):} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{0 \approx 0} &= 0; E_{0 \approx 0, Q} = 0; E_{0 \approx 0, M} = 0; \\ E_{1 \approx 0} &= 1; E_{1 \approx 0, Q} = 1/2^{1/2}; E_{1 \approx 0, M} = 1/2; \\ E_{a \approx 0} &= 1 \ (a \neq 0); E_{a \approx 0, Q} = 1/2^{1/2} \ (a \neq 0); E_{a \approx 0, M} = 1/2 \ (a \neq 0); \\ E_{1 \approx -1} &= 1; E_{1 \approx -1, Q} = 1; E_{1 \approx -1, M} = 1; \\ E_{a \approx -a} &= 1 \ (a \neq 0); E_{a \approx -a, Q} = 1 \ (a \neq 0); E_{a \approx -a, M} = 1 \ (a \neq 0); \\ E_{a \approx b} &= 1 \ (a \geq 0 \geq b, a > b); E_{a \approx b, Q} = E_{a \approx a^2/b, Q} \ (a \neq 0 \neq b). \end{aligned}$$

По принципу допустимой простоты выбирается именно линейная всеобщая погрешность  $E_{a \approx b}$ , тем более что она всегда не меньше квадратичной  $E_{a \approx b, Q}$  и  $E_{a \approx b, M}$  с максимумом и поэтому даёт непременно более жёсткую оценку неточности и чрезвычайно естественно и безупречно обобщается на любое количество  $n$  алгебраических слагаемых в левой части формального равенства с нулевой правой частью, в частности комплексных чисел, векторов и функций:

$$\sum_{i=1}^n a_i \approx 0; E_{\sum_{i=1}^n a_i \approx 0} = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / \|\sum_{i=1}^n |a_i|\| \in [0, 1].$$

Однако линейная всеобщая погрешность  $E_{a \approx b}$  нечувствительно единична при отсутствии одинаковых знаков  $a$  и  $b$ . Бесконечно малую чувствительность при отсутствии одинаковых знаков  $a$  и  $b$  можно придать линейной всеобщей погрешности  $E_{a \approx b}$  добавлением к её знаменателю строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  с избавлением от потребности в именно альтернативном делении, с возможным переходом к пределу по строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  и с возможностью естественного обобщения на любое количество  $n$  алгебраических слагаемых в левой части формального равенства с нулевой правой частью, в частности комплексных чисел, векторов и функций:

$$\begin{aligned} E_{a \approx b, \varepsilon} &= \|a - b\| / (\|a\| + \|b\| + \varepsilon) \in [0, 1], \\ E_{a \approx b} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|a - b\| / (\|a\| + \|b\| + \varepsilon) = \|a - b\| / (\|a\| + \|b\|) \in [0, 1], \\ E_{a \approx b} &= \|a - b\| / (\|a\| + \|b\| + 0) = \|a - b\| / (\|a\| + \|b\|) \in [0, 1]; \\ \sum_{i=1}^n a_i &\approx 0; E_{\sum_{i=1}^n a_i \approx 0, \varepsilon} = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (\|\sum_{i=1}^n |a_i|\| + \varepsilon) \in [0, 1], \\ \sum_{i=1}^n a_i &\approx 0; E_{\sum_{i=1}^n a_i \approx 0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (\|\sum_{i=1}^n |a_i|\| + \varepsilon) = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / \|\sum_{i=1}^n |a_i|\| \in [0, 1], \\ \sum_{i=1}^n a_i &\approx 0; E_{\sum_{i=1}^n a_i \approx 0} = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (\|\sum_{i=1}^n |a_i|\| + 0) = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / \|\sum_{i=1}^n |a_i|\| \in [0, 1]. \end{aligned}$$

При отсутствии перехода к пределу линейная всеобщая погрешность  $E_\varepsilon$  с использованием строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  оказывается не постоянной, а бесконечно мало переменной, или почти постоянной, или квазиконстантой, определяемой как величина, для

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 215/244

которой существует такая постоянная, являющаяся пределом этой величины, что разность между этими величиной и постоянной является бесконечно малой. Подобная ситуация обычна для конечных пределов. Необычна здесь переменная, хотя и бесконечно мало переменная, оценка  $E_\varepsilon$  постоянного предмета. Пределом линейной всеобщей погрешности  $E_\varepsilon$  с использованием строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  оказывается линейная всеобщая погрешность  $E$  без использования строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  и поэтому с использованием альтернативного деления во избежание деления нуля на нуль.

При потребности в конечной чувствительности при отсутствии одинаковых знаков  $a$  и  $b$  могут использоваться несколько более сложные и дающие более мягкую оценку неточности квадратичная всеобщая погрешность  $E_{a=? b, Q}$  или всеобщая погрешность  $E_{a=? b, M}$  с максимумом. Для любого количества  $n$  действительных алгебраических слагаемых в левой части формального равенства

$$\sum_{i=1}^n a_i = ? 0$$

с нулевой правой частью можно каждое из слагаемых расположить в той части формального равенства, в которой действительное алгебраическое слагаемое непременно неотрицательно, затем просуммировать каждую из этих частей, обозначить сумму в левой части через  $a$  и сумму в правой части через  $b$ , а теперь применить соответствующую формулу

$$E_{a=? b, Q} = \|a - b\| / [2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2} \in [0, 1],$$

$$E_{a=? b, M} = \|a - b\| / (2 \max\{\|a\|, \|b\|\}) \in [0, 1]$$

для двух элементов формального равенства. Для любого количества  $n$  алгебраических слагаемых, в частности комплексных чисел, векторов и функций, в левой части формального равенства

$$\sum_{i=1}^n a_i = ? 0$$

с нулевой правой частью можно определить квадратичную всеобщую погрешность  $E_{\sum_{i=1,2,\dots,n}} = ? 0, Q$  или всеобщую погрешность  $E_{\sum_{i=1,2,\dots,n}} = ? 0, M$  с максимумом как максимум двухэлементных квадратичных всеобщих погрешностей  $E_{a=? b, Q}$  или максимум двухэлементных всеобщих погрешностей  $E_{a=? b, M}$  с максимумом для конечного множества всевозможных распределений  $n$  алгебраических слагаемых по частям формального равенства, причём для каждого из распределений следует просуммировать каждую из этих частей, обозначить сумму в левой части через  $a$  и сумму в правой части через  $b$ , а теперь применить соответствующую формулу

$$E_{a=? b, Q} = \|a - b\| / [2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2} \in [0, 1],$$

$$E_{a=? b, M} = \|a - b\| / (2 \max\{\|a\|, \|b\|\}) \in [0, 1]$$

для двух элементов формального равенства. Но также можно и сразу применить более общую соответствующую формулу

$$\sum_{i=1}^n a_i = ? 0; E_{\sum_{i=1,2,\dots,n}} = ? 0, Q = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (n \sum_{i=1}^n \|a_i\|^2)^{1/2} \in [0, 1],$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = ? 0; E_{\sum_{i=1,2,\dots,n}} = ? 0, M = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (n \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|\}) \in [0, 1],$$

причём первую из них с учётом частного случая неравенства Коши–Буняковского.

Наряду с обычной нелогичной двусмысленной относительной погрешностью выше были дополнительно предложены две хотя бы частично усовершенствованные именно однозначные относительные погрешности:

левочастная относительная погрешность

$$\delta_{a=? b, a} = \|a - b\| / \|a\|;$$

правочастная относительная погрешность

$$\delta_{a=? b, a} = \|a - b\| / \|b\|.$$

Их дальнейшее усовершенствование достигается исключением деления нуля на нуль благодаря использованию введённого альтернативного деления:

левочастная альтернативно относительная погрешность

$$\delta_{a=? b, a, //} = \|a - b\| / \|a\| \in [0, +\infty);$$

правочастная альтернативно относительная погрешность

$$\delta_{a=? b, a, //} = \|a - b\| / \|b\| \in [0, +\infty).$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 216/244

В последних формулах справа указаны множества значений соответствующих относительных погрешностей. Стремление их к плюс бесконечности осуществляется при стремлении буквы в знаменателе к нулю, тогда как другая буква сохраняет конечное ненулевое значение. Нелогичность обычной и этих двух относительных погрешностей заключается в том, что у них в числителе используются оба элемента формального равенства, а в знаменателе только один из этих элементов при отсутствии какой бы то ни было зависимости от другого элемента. Поэтому дальнейшее логичное усовершенствование относительных погрешностей осуществляется заменой (в знаменателе) нормы одного из элементов формального равенства некоторой функцией именно норм

$$c = \|a\|,$$
$$d = \|b\|$$

обоих элементов формального равенства, причём равной общему значению этих норм при условии равенства норм обоих элементов формального равенства. Таковы, в частности, классические средние двух неотрицательных чисел  $c, d$  с классическими неравенствами между этими средними:

среднее гармоническое, усовершенствованное исключением деления нуля на нуль благодаря использованию введённого альтернативного деления,

$$H = 2cd/(c + d);$$

среднее геометрическое

$$G = (cd)^{1/2};$$

среднее арифметическое

$$A = (c + d)/2;$$

среднее квадратическое

$$Q = [(c^2 + d^2)/2]^{1/2};$$
$$H \leq G \leq A \leq Q.$$

Такова также функция минимума

$$m = \min\{c, d\}$$

этих чисел, которая не больше всех этих средних. Действительно, одно из этих входящих в эту функцию симметрично двух неотрицательных чисел  $c, d$  не больше другого и можно обозначить их так, что  $c \leq d$ . Тогда

$$m = \min\{c, d\} = c \leq 2cd/(c + d) = H,$$

поскольку

$$c(c + d) \leq c(d + d) = 2cd.$$

Такова также функция максимума

$$M = \max\{c, d\}$$

этих чисел, которая не меньше всех этих средних. Действительно, одно из этих входящих в эту функцию симметрично двух неотрицательных чисел  $c, d$  не больше другого и можно обозначить их так, что  $c \leq d$ . Тогда

$$M = \max\{c, d\} = d \geq [(c^2 + d^2)/2]^{1/2} = Q,$$

поскольку

$$2d^2 \geq c^2 + d^2.$$

Следовательно, получается цепочка нестрогих неравенств в порядке неубывания

$$m \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq M.$$

В итоге наряду с обычной нелогичной двусмысленной относительной погрешностью и двумя хотя бы частично усовершенствованными именно однозначными относительными погрешностями дополнительно предлагаются ещё шесть следующих хотя бы частично усовершенствованных именно однозначных относительных погрешностей в порядке невозрастания ввиду неубывания знаменателей:

относительная погрешность с минимумом

$$\delta_{a \rightarrow b, m} = \|a - b\| / \min\{\|a\|, \|b\|\};$$

относительная погрешность со средним гармоническим



$$\delta_{a \approx b, H} = \|a^2 - b^2\| / (2\|ab\|);$$

относительная погрешность со средним геометрическим

$$\delta_{a \approx b, G} = \|a - b\| / \|ab\|^{1/2};$$

относительная погрешность со средним арифметическим

$$\delta_{a \approx b, A} = \|a - b\| / [(|a| + |b|)/2] = 2\|a - b\| / (|a| + |b|);$$

относительная погрешность со средним квадратическим

$$\delta_{a \approx b, Q} = \|a - b\| / [(\|a\|^2 + \|b\|^2)/2]^{1/2} = 2\|a - b\| / [2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2};$$

относительная погрешность с максимумом

$$\delta_{a \approx b, M} = \|a - b\| / \max\{|a|, |b|\};$$

$$\delta_{a \approx b, m} \geq \delta_{a \approx b, H} \geq \delta_{a \approx b, G} \geq \delta_{a \approx b, A} \geq \delta_{a \approx b, Q} \geq \delta_{a \approx b, M}.$$

Их дальнейшее усовершенствование достигается исключением деления нуля на ноль благодаря использованию введённого альтернативного деления:

альтернативно относительная погрешность с минимумом

$$\delta_{a \approx b, m, //} = \|a - b\| / \min\{|a|, |b|\} \in [0, +\infty);$$

альтернативно относительная погрешность со средним гармоническим

$$\delta_{a \approx b, H, //} = \|a^2 - b^2\| / (2\|ab\|) \in [0, +\infty);$$

альтернативно относительная погрешность со средним геометрическим

$$\delta_{a \approx b, G, //} = \|a - b\| / \|ab\|^{1/2} \in [0, +\infty);$$

альтернативно относительная погрешность со средним арифметическим

$$\delta_{a \approx b, A, //} = \|a - b\| / [(|a| + |b|)/2] = 2\|a - b\| / (|a| + |b|) = 2E_{a \approx b} \in [0, 2];$$

альтернативно относительная погрешность со средним квадратическим

$$\delta_{a \approx b, Q, //} = \|a - b\| / [(\|a\|^2 + \|b\|^2)/2]^{1/2} = 2\|a - b\| / [2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2} = 2E_{a \approx b, Q} \in [0, 2];$$

альтернативно относительная погрешность с максимумом

$$\delta_{a \approx b, M, //} = \|a - b\| / \max\{|a|, |b|\} = 2E_{a \approx b, M} \in [0, 2];$$

$$\delta_{a \approx b, m, //} \geq \delta_{a \approx b, H, //} \geq \delta_{a \approx b, G, //} \geq \delta_{a \approx b, A, //} \geq \delta_{a \approx b, Q, //} \geq \delta_{a \approx b, M, //}.$$

В этих формулах, кроме последней, справа указаны множества значений соответствующих относительных погрешностей. Стремление их к плюс бесконечности осуществляется при стремлении одной буквы к нулю, тогда как другая буква сохраняет конечное ненулевое значение. В трёх формулах относительные погрешности со средним арифметическим, со средним квадратическим и с максимумом оказываются именно точными удвоениями соответствующих всеобщих погрешностей (линейной, квадратичной и с максимумом), а наибольшее с учётом неравенства треугольника значение 2 достигается при условии противоположности ненулевых значений букв

$$b = -a \neq 0.$$

Таким образом, в настоящей диссертации полностью сохраняются и правильно используются в узких пределах применимости, приемлемости и пригодности только для достаточно хороших приближений и даже развиваются, совершенствуются и дополняются известные относительная погрешность, способ её оценки и формула для её определения; при этом непрерывно дополнительно к правильно используемой в пределах её применимости относительной погрешности в настоящей диссертации введена всеобщая погрешность без каких бы то ни было ограничений применимости, приемлемости и пригодности для именно любых формальных (условных, независимых от истинности) приравнений, то есть для любых как приближений, так и неприближений, как инвариантная мера неточности, правильно обобщающей нечёткую приближённость. Для двухэлементных приближённых равенств всеобщая погрешность примерно вдвое меньше относительной погрешности, что следует иметь в виду и непременно правильно учитывать. Такое соотношение является прямым следствием принципиального недостатка именно и только относительной погрешности, которая в модуле (норме) числителя правильно учитывает все элементы формального равенства, а для модуля (нормы) знаменателя принципиально нелогично, произвольно и необоснованно выхватывает только один из элементов формального равенства и полностью игнорирует неравенство треугольника, необходимое для осуществления

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 218/244

замысла относительной погрешности о её неперменной принадлежности отрезку между нулём и единицей.

Условно пригодный, не универсальный, неинвариантный, нелогичный, произвольно субъективно отсекающий выбросы как наиболее неприятную часть данных, на деле опирающийся на вносящие большой вклад в минимизируемую сумму квадратов именно наихудшие сохраняемые данные и почти пренебрегающий вносящими малый вклад в минимизируемую сумму квадратов именно наилучшими данными, могущий вести к неприемлемости и даже к извращениям действительности, произвольно ограничивающийся аналитически удобнейшей второй степенью, вообще не улучшающий свой получаемый итог и совсем не оценивающий его качество, по существу единственный широко применяемый для решения переопределённых задач с превышением числа неизвестных числом уравнений решаемой системы, в частности любых задач аналитического приближения дискретных данных, классический метод наименьших квадратов Лежандра и «короля математики» Гаусса математически строго проанализирован, исправлен и для любого математического моделирования обобщён безусловно пригодным, универсальным, инвариантным, логичным, широко применимым, при выборе аналитически удобнейшей второй степени именно правильно использующим формулы метода наименьших квадратов, последовательно (итерационно) улучшающим свои получаемые итоги и правильно оценивающим их качество, успешно применимым для решения переопределённых задач с превышением числа неизвестных числом уравнений решаемой системы, в частности любых задач аналитического приближения дискретных данных, методом наименьших нормированных степеней, в частности квадратов, в том числе безусловно пригодным, универсальным, инвариантным, логичным, широко применимым, лишённым произвольного субъективизма отсекающего выбросов как наиболее неприятной части данных, полностью и наилучшим образом учитывающим неперменно все данные решаемой задачи, на деле опирающимся на вносящие наибольший вклад в минимизируемую сумму степеней, в частности квадратов, именно наилучшие данные, при выборе аналитически удобнейшей второй степени именно правильно использующим формулы метода наименьших квадратов, последовательно (итерационно) улучшающим свои получаемые итоги и правильно оценивающим их качество, успешно применимым для решения переопределённых задач с превышением числа неизвестных числом уравнений решаемой системы, в частности любых задач аналитического приближения дискретных данных, методом наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов.

Итог (псевдорешение) метода наименьших квадратов можно взять начальным приближением созданного итерационного общего метода наименьших нормально взвешенных степеней, в частности метода наименьших нормально взвешенных квадратов.

Итерационный общий метод наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, позволяет получить квазирешение (наилучшее псевдорешение) и тем самым при необходимости и/или полезности сколь угодно уточнить псевдорешение метода наименьших квадратов.

Сущность общего метода и алгоритма наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, является следующей.

1. Соразмеривание, в частности обезразмеривание, всех уравнений их, возможно, не имеющей точного решения, например переопределённой, системы и всех их неизвестных с исключением итогового влияния равносильных умножений некоторых уравнений системы на свои различные ненулевые множители, в частности единообразным нормированием системы всех уравнений, например для системы линейных уравнений делением каждого из них на квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при всех неизвестных уравнения с допуском умножением некоторых из уравнений на минус единицу.
2. Взятие некоторого псевдорешения, в частности методом наименьших квадратов, системы уравнений как начального приближения к её квазирешению (наилучшему псевдорешению).

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 219/244

3. Установление общей для всех уравнений упорядоченной пары совпадающих или различных между собой неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений любым псевдорешением системы уравнений как предыдущим приближением к её квазирешению (наилучшему псевдорешению). Первая, взвешивающая, из этих двух неотрицательных мер своей положительной степенью своей введённой приведённой плотности вероятности даёт вес своей положительной степени второй, взвешиваемой, из этих двух неотрицательных мер. Такими неотрицательными мерами могут быть наряду с другими всеобщая погрешность, абсолютная погрешность, относительная погрешность, расстояние изображающей псевдорешение точки от графика уравнения, модуль разности одной из координат этой точки и точки этого графика с теми же всеми остальными координатами. В частности, в качестве взвешивающей неотрицательной меры может браться всеобщая погрешность (её введённая приведённая плотность вероятности своей положительной степенью даёт вес), а в качестве взвешиваемой неотрицательной меры – абсолютная погрешность (в том числе модуль разности частей каждого из уравнений решаемой системы), далее возводимая в свою положительную степень, например во вторую степень с целью именно правильного использования простейших и удобнейших формул метода наименьших квадратов.
4. Симметризация совокупности взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы (с указанием, например левыми индексами, и точным учётом кратностей этих мер при их одинаковости для различных уравнений системы) на числовой оси относительно нуля пополнением совокупности взвешивающих неотрицательных мер совокупностью противоположных им значений с теми же кратностями с их указанием, например левыми индексами. Это удобнее равносильного использования на левую половину усечённого симметричного относительно оси ординат нормального распределения.
5. Определение дисперсии распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений, симметричной относительно нуля и поэтому обладающей нулевым средним. Дисперсия этого распределения с учётом нулевого среднего той расширенной совокупности может быть равносильно определена по неотрицательной половине той расширенной совокупности, а именно как начальный момент второго порядка только совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы её псевдорешением.
6. Определение свойственной модельному нормальному распределению (с нулевым средним и дисперсией распределения той расширенной совокупности) введённой приведённой (единообразно для всех уравнений системы и поэтому для наших целей равносильно умноженной на квадратный корень из произведения  $2\pi$  и дисперсии) плотности вероятности каждой взвешивающей неотрицательной меры. Так что формулы этого нормального распределения используются чисто условно, а от (симметричного относительно нуля и поэтому обладающего нулевым средним) подлинного распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений никоим образом не требуется его нормальность.
7. Взвешивание одинаковых положительных степеней взвешиваемых неотрицательных мер (быть может, другими) одинаковыми положительными степенями приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных мер в модельном нормальном распределении (с нулевым средним и дисперсией распределения той расширенной совокупности). При этом независимо от принятия предположения об априорной нормальности и от возможных отклонений от неё распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений относительно нуля каждое из уравнений их системы снабжается тем большим весом (положительной степенью введённой приведённой плотности вероятности взвешивающей неотрицательной меры нарушения уравнения псевдорешением системы уравнений), чем меньше уравнение нарушается этим псевдорешением. Так что выбросы влияют на итог тем слабее, чем дальше они от правильности, и поэтому не нуждаются в выбрасывании и полностью учитываются. Как

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 220/244

следствие имеет место опора не на уравниваемое худшее оставляемое и учитываемое, как это делает метод наименьших квадратов, а на лучшее из всех наличных данных без исключения при полном их учёте. По существу в действительности принимается не предположение об априорной никак не требуемой нормальности распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений относительно нуля, а принцип взвешивания достаточно быстро растущих степеней взвешиваемых неотрицательных мер (с ростом этих мер) степенями куда быстрее показательно убывающих введённых приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных мер (с ростом этих мер) в модельном нормальном распределении (с нулевым средним и дисперсией распределения той расширенной совокупности) для преимущественного опирания непременно на самые точные данные. Обычно вполне достаточна простейшая первая степень этих приведённых плотностей вероятности.

8. Минимизация суммы произведений одинаковых положительных степеней приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы в модельном нормальном распределении (с нулевым средним и дисперсией распределения той расширенной совокупности) на в общем случае другие одинаковые положительные степени взвешиваемых неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы, то есть со степенным нормальным взвешиванием степеней взвешиваемых неотрицательных мер.

9. По совокупности условий этой минимизации определение в общем случае другого псевдорешения исходной системы уравнений как следующего приближения к квазирешению (наилучшему псевдорешению) исходной системы уравнений.

10. Пошаговое продолжение этого итерационного процесса до соответствующего необходимой и достаточной точности определяемого по соответствующим разностям достижения почти постоянства последовательных приближений и характеристик условий указанной минимизации. Определение, обоснование и оценивание полученного квазирешения исходной системы уравнений последовательностью значений её всеобщей погрешности для этих последовательных приближений. Предел этой последовательности есть всеобщая погрешность этого квазирешения как мера несовместности этой системы.

Если, в частности, минимизируется сумма взвешенных любыми положительными весами квадратов разностей обеих частей каждого из уравнений их совокупности, то можно использовать простейшие и удобнейшие формулы метода наименьших квадратов именно правильно благодаря единообразной выравнивающей нормализации каждого из уравнений и их вкладов, которая предшествует минимизации.

Для примера взята произвольная переопределённая система  $m$  линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m)$$

с  $n < m$  искомыми неизвестными ( $m$  и  $n$  – положительные целые числа)

$$x_j \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

с известными коэффициентами  $a_{ij}$  при неизвестных  $x_j$  и известными правыми частями  $b_i$ .

1. Эта переопределённая система линейных уравнений предполагается для простоты полностью обезразмеренной, то есть все известные и неизвестные являются действительными числами. Кроме того, считается выполненным единообразное нормирование системы всех линейных уравнений делением каждого из них на квадратный корень из суммы квадратов его коэффициентов при всех неизвестных с допуском умножением некоторых из уравнений их системы на минус единицу.

2. Как начальное приближение к квазирешению (наилучшему псевдорешению) этой переопределённой системы линейных уравнений берётся её псевдорешение по методу наименьших квадратов.

А именно, существующий минимум суммы  $S$  квадратов разностей обеих частей каждого из уравнений их системы

$$S = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i)^2$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 221/244

достигается при совокупности условий аннулирования половин частных производных этой суммы  $S$  по каждому из неизвестных этой системы уравнений:

$$(1/2)\partial S/\partial x_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i) = 0 \quad (j' = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n).$$

Как известно, эта система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет положительный главный определитель и поэтому является определённой с единственным решением

$$x_j = x_{j(0)} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n),$$

которое является одним из псевдорешений, а именно берущимся в качестве начального приближения псевдорешением по методу наименьших квадратов, исходной переопределённой системы  $m$  линейных уравнений с  $n < m$  искомыми неизвестными.

3. Установление общей для всех уравнений упорядоченной пары совпадающих или различных между собой неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы псевдорешением этой системы уравнений как предыдущим  $k$ -ым приближением к её квазирешению (наилучшему псевдорешению). Первая, взвешивающая, из этих двух неотрицательных мер своей положительной степенью своей введённой приведённой плотности вероятности даёт вес своей положительной степени второй, взвешиваемой, из этих двух неотрицательных мер. В качестве взвешивающей из этих двух неотрицательных мер берётся (без дальнейшего возведения своей введённой приведённой плотности вероятности в степень, то есть оставляемой в первой степени) всеобщая погрешность

$$E_{i(k)} = |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{j(k)} - b_i| / |\sum_{j=1}^n (|a_{ij}||x_{j(k)}| + |b_i|) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

как общая для всех уравнений их системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m)$$

неотрицательная мера нарушения каждого из них псевдорешением

$$x_j = x_{j(k)} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

совокупности уравнений как предыдущим  $k$ -ым приближением к квазирешению (наилучшему псевдорешению) системы уравнений. А в качестве взвешиваемой из этих двух неотрицательных мер берётся абсолютная погрешность – модуль разности обеих частей каждого из уравнений их системы – для дальнейшего возведения во вторую степень, дающего квадрат разности обеих частей каждого из уравнений их системы с целью использования простейших и удобнейших формул метода наименьших квадратов именно правильно благодаря единообразной выравнивающей нормализации каждого из уравнений их системы и их вкладов, которая предшествует минимизации.

4. Симметризация совокупности взвешивающих неотрицательных мер

$$E_{1(k)}, E_{2(k)}, E_{3(k)}, \dots, E_{m(k)}$$

нарушения каждого из уравнений их системы (с указанием, например левыми индексами, и точным учётом кратностей этих мер при их одинаковости для различных уравнений системы) на числовой оси относительно нуля пополнением совокупности взвешивающих неотрицательных мер совокупностью соответствующих противоположных значений

$$-E_{1(k)}, -E_{2(k)}, -E_{3(k)}, \dots, -E_{m(k)}$$

с теми же кратностями с их указанием, например левыми индексами.

5. Определение дисперсии

$$\sigma_{(k)}^2 = [\sum_{i=1}^m (-E_{i(k)})^2 + \sum_{i=1}^m E_{i(k)}^2] / (2m) = [\sum_{i=1}^m E_{i(k)}^2] / m$$

распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений, симметричной относительно нуля и поэтому обладающей нулевым средним. Дисперсия  $\sigma_{(k)}^2$  этого распределения с учётом его нулевого среднего может быть равносильно определена по неотрицательной половине той расширенной совокупности, а именно как начальный момент второго порядка только совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы её псевдорешением. Следует заметить, что в знаменателе дисперсии, единой для всех уравнений их системы, оказывается  $m$ , а не  $(m - 1)$  с вычитанием этой единицы для исключения смещения оценки дисперсии всей генеральной совокупности целиком по дисперсии меньшей выборки, определяемой относительно среднего значения этой выборки. В данном случае выборкой

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 222/244

является вся генеральная совокупность целиком, так что смещение принципиально исключено, тем более что из взвешивающих мер не вычитается их среднее по всем уравнениям именно благодаря пополнению совокупности всех  $m$  взвешивающих неотрицательных мер совокупностью всех  $m$  противоположных им значений. Объединение обеих этих совокупностей как раз и образует эту генеральную совокупность ( $2m$ ) значений. Ввиду их симметрии относительно нуля все начальные  $\alpha_v$  и соответствующего неотрицательного целого порядка  $v$  центральные  $\mu_v$  моменты попарно совпадают ( $\alpha_v = \mu_v$ ), причём для нечётных порядков  $v$  аннулируются, так что оказывается нулевой и асимметрия распределения

$$\gamma = \mu_3/\sigma^3,$$

как и у нормального распределения. А эксцесс

$$\varepsilon = \mu_4/\sigma^4 - 3$$

распределения этой генеральной совокупности в общем случае не обязан быть нулевым, свойственным нормальному распределению. Причём предложенное введение альтернативного, сохраняющего знак основания, возведения в степень (минус-остепенения)

$$a^{nb} = |a|^b \text{sign}(a)$$

впервые позволяет рассматривать показательные и степенные функции для отрицательных оснований и, в частности, начальные, центральные и смещённые моменты любых нецелых порядков.

6. Определение свойственной модельному нормальному распределению (с нулевым средним и такой же дисперсией  $\sigma_{(k)}^2$ ) введённой приведённой (единообразно для всех уравнений системы и поэтому для наших целей равносильно умноженной на квадратный корень из произведения  $2\pi$  и дисперсии) плотности вероятности

$$\exp[-E_{1(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-E_{2(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-E_{3(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \dots, \exp[-E_{m(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$$

каждой взвешивающей неотрицательной меры соответственно

$$E_{1(k)}, E_{2(k)}, E_{3(k)}, \dots, E_{m(k)}.$$

Так что формулы этого нормального распределения используются чисто условно, а от (симметричного относительно нуля и поэтому обладающего нулевым средним) подлинного распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений никоим образом не требуется его нормальность.

7. Взвешивание одинаковых положительных степеней со своим показателем  $q > 0$  взвешиваемых неотрицательных мер (в частности абсолютных погрешностей, в данном случае модулей разностей частей каждого из уравнений их системы, например во второй степени ( $q = 2$ ) с целью именно правильного использования простейших и удобнейших формул метода наименьших квадратов) нарушения каждого из уравнений их системы

$$|\sum_{j=1}^n a_{1j}x_{j(k)} - b_1|^q, |\sum_{j=1}^n a_{2j}x_{j(k)} - b_2|^q, |\sum_{j=1}^n a_{3j}x_{j(k)} - b_3|^q, \dots, |\sum_{j=1}^n a_{mj}x_{j(k)} - b_m|^q$$

(быть может, другими) одинаковыми положительными степенями

$$\exp[-pE_{1(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-pE_{2(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-pE_{3(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \dots, \exp[-pE_{m(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$$

со своим показателем  $p > 0$  приведённых плотностей вероятности

$$\exp[-E_{1(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-E_{2(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-E_{3(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \dots, \exp[-E_{m(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$$

взвешивающих неотрицательных мер соответственно

$$E_{1(k)}, E_{2(k)}, E_{3(k)}, \dots, E_{m(k)}$$

в модельном нормальном распределении (с нулевым средним и такой же дисперсией  $\sigma_{(k)}^2$ ).

8. Минимизация суммы

$$S_{(k+1)} = \sum_{i=1}^m \exp[-pE_{i(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)] |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i|^q$$

произведений одинаковых положительных степеней со своим показателем  $p > 0$  приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы на в общем случае другие одинаковые положительные степени со своим показателем  $q > 0$  взвешиваемых неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы. Обычно вполне достаточна и принимается здесь простейшая первая степень  $p = 1$  этих приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 223/244

мер. А в качестве взвешиваемой из этих двух неотрицательных мер берётся абсолютная погрешность и возводится во вторую степень  $q = 2$ , что даёт квадрат разности обеих частей каждого из уравнений их системы с целью именно правильного использования простейших и удобнейших формул метода наименьших квадратов. В указанном частном случае при  $p = 1$ ,  $q = 2$  названная сумма принимает вид

$$S_{(k+1)} = \sum_{i=1}^m \exp[-E_{i(k)}/(2\sigma_{(k)}^2)](\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i)^2,$$

тождественный таковому для классического метода наименьших квадратов применительно к предварительному равносильному умножению каждого из уравнений исходной системы на строго положительный квадратный корень из приведённой плотности вероятности как веса для вклада этого уравнения в минимизируемую сумму, то есть применительно к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n \exp[-E_{i(k)}/(4\sigma_{(k)}^2)]a_{ij}x_j = \exp[-E_{i(k)}/(4\sigma_{(k)}^2)]b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m).$$

9. Определение по совокупности условий этой минимизации в общем случае другого псевдорешения исходной переопределённой системы линейных уравнений как следующего  $(k+1)$ -го приближения к квазирешению как именно наилучшему псевдорешению исходной системы уравнений по методу наименьших квадратов применительно к равносильной системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n \exp[-E_{i(k)}/(4\sigma_{(k)}^2)]a_{ij}x_j = \exp[-E_{i(k)}/(4\sigma_{(k)}^2)]b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m).$$

А именно, существующий минимум суммы  $S_{(k+1)}$  квадратов разностей обеих частей каждого из уравнений их системы

$$S_{(k+1)} = \sum_{i=1}^m \{ \sum_{j=1}^n \exp[-E_{i(k)}/(4\sigma_{(k)}^2)]a_{ij}x_j - \exp[-E_{i(k)}/(4\sigma_{(k)}^2)]b_i \}^2$$

достигается при совокупности условий аннулирования половин частных производных этой суммы  $S_{(k+1)}$  по каждому из неизвестных этой системы уравнений:

$$(1/2)\partial S_{(k+1)}/\partial x_{j'} = \sum_{i=1}^m \exp[-E_{i(k)}/(4\sigma_{(k)}^2)]a_{ij'}(\sum_{j=1}^n \exp[-E_{i(k)}/(4\sigma_{(k)}^2)]a_{ij}x_j - \exp[-E_{i(k)}/(4\sigma_{(k)}^2)]b_i) = 0$$

$$(j' = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n).$$

Как известно, эта система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет положительный главный определитель и поэтому является определённой с единственным решением

$$x_j = x_{j(k+1)} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n),$$

которое является одним из псевдорешений исходной переопределённой системы  $m$  линейных уравнений с  $n < m$  искомыми неизвестными и принимается как следующее  $(k+1)$ -ое приближение к квазирешению как именно наилучшему псевдорешению исходной переопределённой системы  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m)$ .

10. Пошаговое продолжение этого итерационного процесса до соответствующего необходимой и достаточной точности определяемого по соответствующим разностям достижения почти постоянства последовательных приближений и характеристик условий указанной минимизации. Определение, обоснование и оценивание полученного квазирешения исходной переопределённой системы  $m$  линейных уравнений с  $n < m$  искомыми неизвестными последовательностью значений её всеобщей погрешности для этих последовательных приближений. Предел этой последовательности является всеобщей погрешностью этого квазирешения как мерой несовместности (противоречивости) этой системы уравнений.

Обработка данных о зависимости прочности стекла от числа циклов нагружения велась методом наименьших нормально взвешенных квадратов для получения первых двух зависимостей и опорой на данные при наименьшем и наибольшем разрушающих давлениях для получения третьей зависимости, причём при равенстве разрушающих давлений берётся среднее геометрическое соответствующих разрушающих напряжений:

$$(4.35)$$

$$n_1(\sigma) = 6 * 10^3 e^{-0.15\sigma/\text{МПа}},$$

$$n_2(\sigma) = 4.7 * 10^{10}/(\sigma/\text{МПа})^6;$$

$$n_3(\sigma) = (61\text{МПа}/\sigma)^{6.03}$$

$$((237 * 325)^{1/2} = 278 = (61/24)^x,$$

$$x \ln(61/24) = \ln(278),$$

$$x = \ln(278)/\ln(61/24) = 6.03.$$

Зависимости изображены на рис. 4.8, где данные эксперимента показаны точками.



Рисунок 4.8. Зависимость прочности стекла от числа  $n$  циклов нагружения: 1, 2 — приближения соответственно показательной и степенной функциями по формулам (4.35).

В таблице 4.5 приведены математические ожидания чисел циклов нагружения до разрушения образцов  $n_1(\sigma)$ ,  $n_2(\sigma)$  и  $n_3(\sigma)$ , рассчитанные по выражениям (4.35), и видны расхождения между  $n$  и  $n_1(\sigma)$ , между  $n$  и  $n_2(\sigma)$ , а также между  $n$  и  $n_3(\sigma)$ .

Аналогичные результаты для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания без бокового давления (достаточное условие именно радиального растрескивания при разрушении), получаются при использовании созданных общего (полу)степенного метода и теорий деформирования, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что для обеспечения работоспособности светопрозрачных элементов из неорганического стекла в пределах 200–300 циклов необходимо снизить максимально действующие напряжения в 2...2.5 раза по сравнению с разрушающими напряжениями при однократном кратковременном нагружении таких светопрозрачных элементов.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 225/244

#### **4.6. Обоснования защищённых авторскими свидетельствами на изобретения предложенных новых конструкций иллюминаторов для высоких давлений по созданным общим теориям деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов**

На основании созданных теорий деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных и несущих элементов иллюминаторов для высоких давлений, предложен и обоснован ряд конструкций иллюминаторов [20–23, 25, 32], защищённых авторскими свидетельствами. Во многих из них конструктивными мерами снижается резкая концентрация контактных давлений, что существенно повышает прочность конструкций и попутно способствует увеличению точности расчётов общим (полу)степенным методом. Шесть из этих конструкций иллюминаторов для высоких давлений показаны на рис. 4.9.

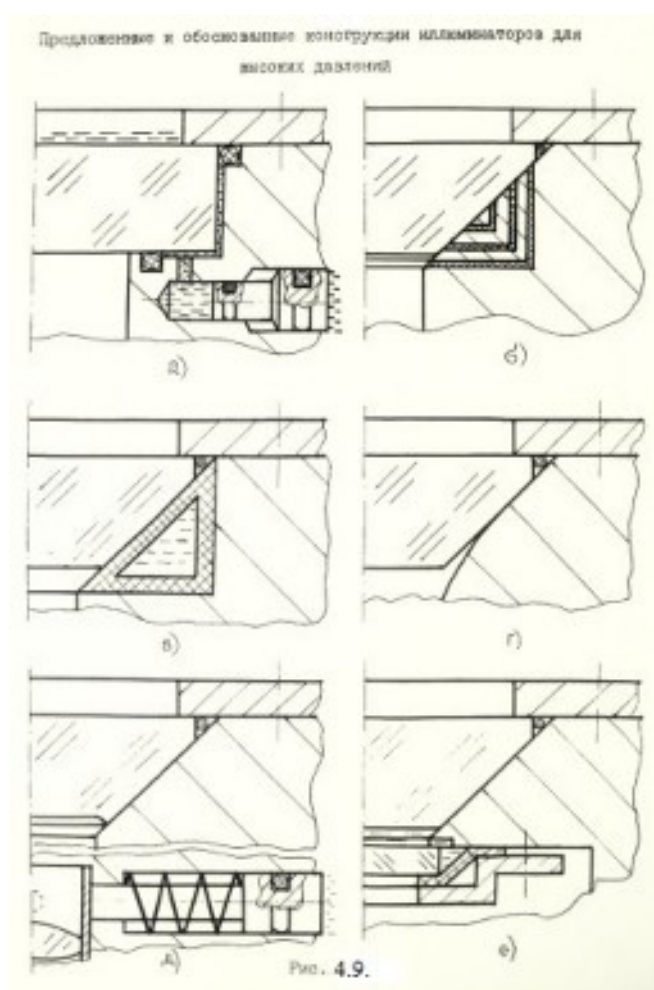


Рисунок 4.9. Предложенные и обоснованные конструкции иллюминаторов для высоких давлений, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

Развивающий идею комплексного улучшения прочностных и оптических характеристик иллюминатор высокого давления [25] содержит (рис. 4.9, а) смотровое плоскопараллельное цилиндрическое стекло, закреплённое посредством прижимного кольца в цилиндрической кольцевой выточке корпуса с зазором, герметизированным уплотнительными элементами, заполненным жидкостью и соединённым каналом с полостью радиального двухступенчатого углубления, в котором установлен двухступенчатый поршень, поджатый давлением

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelinson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 226/244

окружающей среды. Давление на всю поверхность внешнего основания (попытки снизить площадь приложения давления сужают поле зрения, и полезность их проблематична) уравнивается увеличенным давлением на кольцевую периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания, создаваемым с помощью дифференциального поршня. Увеличение соответствует отношению площадей поперечных сечений ступеней поршня, а это отношение может быть равно отношению площади внешнего основания к площади кольцевой периферической части частично нагруженного внутреннего основания. Это позволяет уменьшить, а при должном соотношении площадей ступеней поршня и исключить силовое взаимодействие светопрозрачного элемента с оправой. Таким образом, светопрозрачный элемент может удерживаться в равновесии одними гидростатическими давлениями, приложенными с противоположных сторон, и контакты светопрозрачного элемента с оправой и фланцем могут быть лишь ограничительными, но не силовыми, что повышает прочность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора высокого давления. Ведь вследствие шероховатости соприкасающихся поверхностей действительная площадь контакта всегда гораздо меньше номинальной [1, 97], высоки контактные давления на микровыступы, нависающие участки резко снижают контактную прочность неорганического стекла [91, 96, 133]. Кроме того, повышенное равномерное давление той же величины действует и на боковую поверхность светопрозрачного элемента и компенсирует растягивающие напряжения от его изгиба. Этим достигается дополнительное повышение прочности, так как при характерных для иллюминаторов высокого давления размерах светопрозрачного элемента указанное отношение площадей (и давлений) меньше  $P_{\max}$ . Так, из рис. 4.1 следует, что увеличение давления на боковую поверхность в указанном отношении приводит к повышению несущей способности светопрозрачного элемента примерно на две трети по сравнению с тем случаем, когда на боковую поверхность действует давление той же величины, что и внешнее давление. А поле зрения практически не сужается фланцем, вынос которого минимален. В результате комплексно улучшаются оптико-механические свойства иллюминатора, его качество и надёжность.

Иллюминатор [20] содержит (рис. 4.9, б) стеклоэлемент в виде именно существенно трёхмерного усечённого конуса, а между ним и опорой установлены сопряжённые с его конической поверхностью кольца уголкового поперечного сечения. Они расположены симметрично одно в другом и снабжены установленными между ними и сопряжёнными с ними эластичными прокладками также уголкового сечения. В результате при деформировании стеклоэлемента под действием внешнего давления происходят взаимные перемещения колец, обеспечивая более равномерное распределение контактного давления на стеклоэлемент, и повышается несущая способность иллюминатора для высоких давлений.

Та же цель в конструкции [23] достигается (рис. 4.9, в) установкой кольца треугольного сечения, сопряжённого со стеклоэлементом в виде именно существенно трёхмерного усечённого конуса и с цилиндрической выточкой в корпусе. Это кольцо выполнено из металлизированной резины и имеет заполненную жидкостью кольцевую полость. Под действием деформированного давлением стеклоэлемента соответственно деформируется и кольцо, обеспечивая более равномерное распределение контактного давления на стеклоэлемент. Тем самым повышаются надёжность и долговечность иллюминатора.

Конструкция [21] отличается тем, что сопряжённая с именно существенно трёхмерным коническим стеклоэлементом поверхность оправы (рис. 4.9, г) имеет выпуклую в его сторону образующую, а между ними со стороны меньшего основания стеклоэлемента есть зазор. В результате при деформировании стеклоэлемента внешним давлением сглаживается концентрация напряжений у меньшего основания стеклоэлемента, что повышает прочность, надёжность и долговечность такого иллюминатора.

Другой способ [32] (рис. 4.9, д) уменьшения концентрации напряжений у меньшего основания именно существенно трёхмерного конического стеклоэлемента заключается в

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 227/244

выполнении на его внутреннем основании выемки с перпендикулярным боковой поверхности краем и плоской центральной частью. В результате снижается жёсткость стеклоэлемента у края этого основания, сглаживается максимум контактного давления и повышаются прочность и долговечность иллюминатора.

Наконец, конструкция согласно [22], показанная на рис. 4.9, е, позволяет повысить качество изображения способом, отличным от предварительной продольной расфокусировки. Не имеет значения то, что иллюминатор для высоких давлений снабжён именно существенно трёхмерным коническим светопрозрачным элементом: перенос той же идеи на случай именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента не требует никакой её замены. Выше установлено, что вклад искривления частично нагруженного внутреннего основания в продольную расфокусировку на порядок больше, чем модуль вклада искривления внешнего основания именно существенно трёхмерного светопрозрачного элемента. Это связано с различиями как в величинах искривлений, так и в разностях показателей преломлений на оптических поверхностях. Поэтому в данной конструкции устраняется влияние искривления частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного светопрозрачного элемента на продольную расфокусировку. С этой целью между ним и гидрообъективом устанавливается плоскопараллельная стеклянная пластина, а полость между ней и светопрозрачным элементом заполняется иммерсионной жидкостью (например кремнийорганической) с показателем преломления, близким к показателю преломления стекла. Пластина поджимается к оправе ступенчатым фланцем через эластичную прокладку, образующую полость с боковой поверхностью пластины и смежной поверхностью оправы. Эта полость изолирована от внутренней полости подводного аппарата, однако сообщается с пространством между светопрозрачным элементом и пластиной через показанные на рисунке радиальные пазы в оправе и заполнена той же иммерсионной жидкостью. В процессе работы внутренняя поверхность светопрозрачного элемента продвигается и прогибается вовнутрь, слегка давит на иммерсионную жидкость, и она перетекает в полость, ограниченную эластичной прокладкой. Её жёсткость значительно меньше жёсткости стеклянной пластины, а давление на них невелико и одинаково (по закону Паскаля), и можно считать, что стеклянная пластина не искривляется. Поскольку с точки зрения оптики (то есть хода луча) основной светопрозрачный элемент, иммерсионная жидкость и стеклянная пластина ввиду близости показателей преломления могут рассматриваться как одно целое и роль его частично нагруженного внутреннего основания играет недеформированное основание стеклянной пластины, обращённое к гидрообъективу, то влияние искривления поверхности частично нагруженного внутреннего основания светопрозрачного элемента исключается и расфокусировка снижается на порядок. При этом в идеальном случае меняется её знак в соответствии с тем, что вклады в продольную расфокусировку искривлений поверхностей внешнего и внутреннего оснований светопрозрачного элемента имеют в формуле (4.22) разные знаки, но ввиду некоторых различий в показателях преломления стекла и иммерсионной жидкости и небольших деформаций стеклянной пластины этого утверждать нельзя. Впрочем, с практической точки зрения такое утверждение не особенно значимо, а положительный эффект не подлежит сомнению.

Таким образом, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения новые конструкции иллюминаторов высокого давления обладают повышенной прочностью и улучшенными оптическими свойствами и разработаны на основе принципиально новых представлений о напряжённо-деформированном состоянии, жёсткости, оптике, прочности и разрушении светопрозрачных элементов как именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел с плоскопараллельными основаниями. Эти принципиально новые представления получены благодаря созданным теориям деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных и несущих элементов иллюминаторов для высоких давлений, по

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 228/244

созданному общему (полу)степенному методу, в том числе по общему (полу)степенному аналитическому методу макроэлементов.

#### 4.7. Выводы по главе 4

1. Открыта система взаимосвязанных принципиальных недостатков, изъянов и пороков абсолютной и относительной погрешностей и классического метода наименьших квадратов. Абсолютная погрешность не инвариантна, поскольку изменяется при равносильных (эквивалентных) преобразованиях формального равенства, и в одиночку не способна оценивать качество приближения. Относительная погрешность нелогична, приложима только к двухэлементному формальному равенству, для него двусмысленна, может вопреки замыслу превышать единицу и даже быть бесконечной. Метод наименьших квадратов приложим только к системе уравнений с единой физической единицей, не инвариантен, поскольку итог изменяется при равносильных (эквивалентных) преобразованиях уравнений системы, не способен уточнять итог и может парадоксально извращать действительность.
2. Введена безупречная всеобщая погрешность как инвариантная мера неточности, обобщающей нечёткую приближённость, с оценкой их и меры несовместности противоречивой задачи для аналитического приближения к наилучшему из неточных псевдорешений квазирешению, обобщающему точное решение, невозможное в противоречивой задаче, в том числе в переопределённой задаче обработки данных. В общей теории обработки данных создан итерационный общий метод наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, с опорой на самые лучшие данные и полным учётом именно всех данных без изъятия выбросов и приложен к теоретическим и экспериментальным исследованиям прочности и разрушения неорганического стекла при повторно-статическом нагружении.
3. Созданы и развиты общая теория и общие методы обобщения критериев предельных состояний и прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности, на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию. В частности, именно впервые обобщены для любого изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, третья теория прочности (критерий наибольших сдвиговых напряжений) и четвёртая теория прочности (критерий удельной энергии формоизменения), приемлемые только для изотропного материала, непременно одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, в том числе применительно к предельной поверхности органического стекла при сложном напряжённом состоянии.
4. Приложением общего (полу)степенного метода созданы, экспериментально подтверждены и применены теории прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность. Открыты, теоретически и экспериментально обоснованы и практически использованы явления существования переходного (для опаснейшей точки) и наилучшего значений отношения давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела из неорганического стекла к внешнему давлению. Превышение (примерно равного  $1/3$  при толщине порядка радиуса) переходного значения этого отношения приводит к скачкообразному перемещению места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в стеклоэлементе из центра на край свободной от давления центральной части его внутренней поверхности; соответственно изменяется характер его разрушения, так что взамен радиального растрескивания стеклоэлемента происходит скалывание и последующее растрескивание сегмента, меньшего полусферы, основанием которого является ненагруженная центральная часть частично нагруженного основания стеклоэлемента. При наилучшем (примерно равном трём при толщине порядка радиуса)

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 229/244

значении этого отношения разрушающее давление повышается примерно на порядок по сравнению со случаем отсутствия бокового давления взамен примерно четырёхкратного повышения при распространении внешнего давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

5. Приложением общего (полу)степенного метода созданы, экспериментально подтверждены и применены теории деформирования, жёсткости и оптики (теории влияния напряжённо-деформированного состояния на оптические свойства) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность. Предложена и обоснована концепция светопреломления иллюминатора как неотъемлемой составной части подводной оптической системы, заключающаяся в зависимости её характеристик от деформирования иллюминатора и в первую очередь его светопрозрачного элемента. Влияние его напряжённо-деформированного состояния в целом на оптические свойства системы существенно сказывается только на её продольной расфокусировке и примерно на 90 % определяется одной лишь кривизной в центре частично нагруженного основания стеклоэлемента. Открыто, обосновано и использовано явление существования такой наилучшей начальной расфокусировки оптической системы, которая противоположна среднему значению рабочей расфокусировки и снижает итоговую рабочую расфокусировку примерно на порядок.

6. Открыты и обоснованы ещё шесть принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность. Открыты и обоснованы явление и закон кратного (примерно в три-четыре раза) превышения кривизны в центре полностью нагруженного основания кривизной в центре частично нагруженного основания. Открыты и обоснованы явление и закон необходимости и чрезвычайной существенности дополнения стрелы прогиба как общей характеристики искривления при изгибе ещё и кривизной как местной характеристикой искривления при изгибе частично нагруженного основания и особенно полностью нагруженного основания. Открыты и обоснованы явление и закон кратного (примерно на порядок) превышения модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания положительным вкладом кривизны в центре частично нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта. Открыты и обоснованы явление и закон необходимости, полезности и чрезвычайной существенности выделения и именно достаточно точного учёта знака и относительно малого модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта, в том числе для количественного и качественного оценивания методов моделирования напряжённо-деформированного состояния, жёсткости и оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента. Открыты и обоснованы явление и закон необходимости и полезности (для углубления исследования напряжённо-деформированного состояния) промежуточного выхода исследования за собственные пределы напряжённо-деформированного состояния с последующим возвращением исследования к напряжённо-деформированному состоянию по диалектическому закону отрицания отрицания. Открыты и обоснованы явление и закон необходимости и полезности неперенного выделения и отдельного исследования влияний отдельных существенных следствий (свойств, частей, элементов) напряжённо-деформированного состояния наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 230/244

напряжённо-деформированного состояния, в данном случае влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

7. Открыты и обоснованы всеобщие явления и законы целесообразности относительной малости модуля количественного величиной и качественного знаком оценивающего различителя методов моделирования между собой, целесообразности промежуточного выхода исследования за пределы предмета первоначального рассмотрения с последующим возвращением исследования к этому предмету (по диалектическому закону отрицания отрицания и открытому общему закону кратного отрицания), а также необходимости и полезности неперенного выделения и отдельного исследования составляющих влияний отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния целого на предмет исследования.

8. Приложением созданных теорий деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность поставлена и решена связанная задача прочности, жёсткости и оптики именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, и созданы метод и алгоритм комплексной оптимизации совокупности всех соответствующих характеристик иллюминатора для высоких давлений.

9. На основе совокупности открытых явлений и принципиально новых представлений созданных теорий деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность по общему (полу)степенному методу, в том числе по общему (полу)степенному аналитическому методу макроэлементов, предложены и обоснованы новые рациональные конструкции иллюминаторов для высоких давлений с повышенными характеристиками прочности, жёсткости и оптики, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ**

Одним из эффективных методов поиска и разведки полезных ископаемых в Мировом океане является фотокинотелевизионная съёмка. Съёмочная аппаратура устанавливается в подводных аппаратах, включающих иллюминаторы со светопрозрачными элементами. В целях универсализации гидрообъективов, упрощения изготовления светопрозрачных элементов, монтажа и юстировки подводных оптических систем светопрозрачный элемент должен иметь плоскопараллельные оптические поверхности. Под действием давлений первоначально плоские оптические поверхности светопрозрачного элемента иллюминатора искривляются, что обуславливает дополнительные искажения, которые не исправляются гидрообъективом. Поэтому для проектирования иллюминаторов как неотъемлемых составных частей подводных оптических систем, удовлетворяющих высоким требованиям к качеству изображения, необходимо достоверно знать напряжённо-деформированное состояние стеклянных светопрозрачных элементов и учитывать его влияние на прочность и оптические свойства иллюминаторов. Однако применяемые в настоящее время аналитические методы теории пластин и теории плит не учитывают большой относительной толщины светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений и не могут с необходимой точностью и достоверностью характеризовать действительное напряжённо-деформированное состояние таких светопрозрачных элементов.

Поэтому весьма актуальными являются разработка аналитического метода расчёта напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 231/244

цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при осесимметричном изгибе под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание, на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания и на боковую поверхность, исследование с помощью этого метода закономерностей деформирования и разрушения такого тела (элемента), а также создание на этой основе теории проектирования иллюминаторов для высоких давлений со светопрозрачными элементами из органического или неорганического стекла.

Выполненный комплекс теоретических и экспериментальных исследований напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов, с плоскопараллельными основаниями и его влияния на прочностные и оптические характеристики иллюминаторов для высоких давлений позволил сделать следующие основные выводы:

1. Как закономерный итог достижения цели этой кандидатской диссертации с выполнением её задач выдвижением и осуществлением её идей созданы и практически целесообразно развиты математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий и методов как теоретический фундамент для разработки теорий (с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов) и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, прочности и оптических свойств осесимметрично изгибаемых равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерных цилиндрических тел (светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений) при защемлении края, опирании по краю или по окружности меньшего радиуса или при повышенном равномерном периферическом противодействии с возможным равномерным давлением на боковую поверхность.

2. Создана и развита математическая система принципиально новых основополагающих общих теорий и методов, среди них общие теории общих математических задач (как множеств функциональных отношений (уравнений, неравенств) с известными операторами над искомыми функциями известных аргументов), собственных совокупностей классов функций для множеств операторов с общими решениями бигармонического уравнения в (полу)степенных рядах как собственных классах функций, общий (полу)степенной метод решения задач как множеств функциональных уравнений, непременно дополнительное альтернативное возведение в степень (минус-остепенение) умножением функции знака основания на степень нормы основания с обобщением степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания, в частности для моментов любых нецелых порядков и для дальнейших обобщений общего (полу)степенного метода.

3. Создана и развита метрологическая система принципиально новых основополагающих общих теорий и методов, среди них общая теория анализа приемлемости методов обработки данных (с доказанными изъянами абсолютной погрешности и нелогичных относительной погрешности и метода наименьших квадратов), общие теории неточных псевдорешений, их наилучших квазирешений и всеобщей погрешности как инвариантной меры неточности, обобщающей нечёткую приближённость, наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при неперменной опоре на лучшие из них учётом всех нормально взвешенных данных безотносительно нормальности их распределения без исключения выбросов, в том числе общий метод наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов с именно правильным использованием простейших и удобнейших формул лишь условно пригодного метода наименьших квадратов.

4. Создана и развита оптико-механическая система основополагающих принципиально новых общих теорий и методов, в частности общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов с впервые простыми замкнутыми решениями нетривиальных именно существенно трёхмерных задач механики, прочности и оптики; теории минимизации и

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 232/244

устранения невязок сопряжения решений для макроэлементов разбиения тела между собой и с граничными условиями задачи; теории осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерных цилиндрических тел при защемлении края, опирании по краю или по окружности меньшего радиуса или при повышенном равномерном периферическом противодействии с возможным равномерным давлением на боковую поверхность; теория значительного лишь для расфокусировки оптической системы в основном обусловленного кривизной в центре свободной от нагрузки оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента влияния его напряжённо-деформированного состояния на оптику.

5. Создана и развита прочностная система принципиально новых основополагающих общих теорий и методов, в том числе общая теория и общие методы обобщения критериев предельных состояний и критериев прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) критериальной предельной поверхности, и добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции на случаи анизотропии и различных сопротивлений материала растяжению и сжатию. Впервые обобщены для любого изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, третья теория прочности (критерий наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска и четвёртая теория прочности (критерий удельной энергии формоизменения, или критерий октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, приемлемые только для изотропного материала, непременно одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию. Эти общая теория и общие методы обобщения критериев предельных состояний и критериев прочности принципиально и практически важны и полезны, в том числе для предельной поверхности органического стекла, ведь многие изотропные материалы, считающиеся одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию, на самом деле сопротивляются им всё-таки различно, так что впервые появляется возможность соответствующих уточнений, а главное, достигается резкое расширение областей применимости и особенно приемлемости этих и других критериев предельных состояний и критериев прочности. Создан общий метод решения задач прочности осесимметрично изгибаемых именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел под равномерными давлениями на одно основание, на кольцевую периферическую часть другого основания и на боковую поверхность по необходимо для определения опаснейшей точки преобразованному к виду с равносильным (эквивалентным) напряжением и с единым предельным напряжением критерию наибольших нормальных напряжений (первой теории прочности) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе, критерию Кулона–Мора и критерию Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева. Открыто и обосновано явление существования переходного значения отношения давления на боковую поверхность такого тела из неорганического стекла к внешнему давлению. При превышении этого переходного значения место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в теле скачком переходит из центра на край ненагруженной центральной части частично нагруженного основания, так что принципиально изменяется характер разрушения: вместо радиального растрескивания всего тела происходят скалывание сегмента у ненагруженной центральной части частично нагруженного основания тела и последующее растрескивание этого сегмента. Несущая способность тела повышается примерно в четыре раза при единичном значении этого отношения и примерно в шесть-семь раз при существующем в пределах примерно двух-трёх наилучшем значении этого отношения, осуществимом двухступенчатым поршнем.

6. Достоверность созданных математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых общих теорий и методов испытана и доказана путём аналитических и численных сопоставлений полученных формул и расчётов по ним с формулами классических и других известных аналитических решений и расчётами по ним, итогами численных методов и приемлемо обработанными экспериментальными данными.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 233/244

7. Приложением созданных математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых общих теорий и методов к впервые просто замкнуто решаемым нетривиальным задачам механики, прочности и оптики именно существенно трёхмерных цилиндрических тел, в том числе светопрозрачных элементов, из пластичных и хрупких материалов разработаны теории и простые замкнутые общие аналитические методы исследования напряжённо-деформированных состояний, прочности и оптики таких тел как теории рациональных комплексных проектирования таких тел и управления их системой этих ключевых свойств.

8. Открыты системы принципиально новых явлений и законов деформирования, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в том числе светопрозрачных элементов, с уточнением, развитием, обобщением и полезным дополнением классических и других известных аналитических методов и их результатов.

9. Созданные (математической, метрологической, оптико-механической и прочностной системами принципиально новых основополагающих общих теорий и методов) теории рациональных комплексных проектирования и управления системой напряжённо-деформированных состояний, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел (светопрозрачных элементов) привели посредством анализа и синтеза открытых и обоснованных принципиально новых оптико-механических явлений и законов деформирования и оптики, прочности и разрушения к созданию принципиально новых простых замкнутых общих аналитических методов и к обоснованию и внедрению эффективных конструкций иллюминаторов для высокого давления, в том числе защищённых авторскими свидетельствами на изобретения.

10. Созданные математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий и методов открыли и обосновали систему всеобщих явлений и законов и существенно развивают математику, метрологию, механику деформируемого твёрдого тела и науку о прочности.

Совокупность разработанных автором теоретических положений можно квалифицировать как новое крупное достижение в развитии перспективного научного направления в динамике, прочности машин, приборов и аппаратуры – создания общих теорий и методов получения простых замкнутых аналитических решений задач механики, прочности и оптики с открытием их явлений и законов для существенно трёхмерных цилиндрических тел. Кроме того, в диссертации изложены научно обоснованные технические решения актуальных задач рационального проектирования иллюминаторов для высокого давления, значительно повышающие их жёсткость, прочность и оптические свойства, с вкладом в ускорение научно-технического прогресса.

Таким образом, в частности, впервые поставлена и решена научная задача динамики, прочности машин, приборов и аппаратуры, заключающаяся в создании аналитических методов расчёта и комплексной оптимизации напряжённо-деформированного состояния, жёсткости, оптики и прочности именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в том числе светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений.

Внедрение результатов настоящей кандидатской диссертации в Ленинградском институте точной механики и оптики и в Научно-исследовательском и проектном институте геофизических методов разведки океана ПО «Южморгеология» позволило усовершенствовать проектирование и расчёт подводных оптических систем, повысить качество изображения подводных объектов, увеличить достоверность получаемой информации и сократить время на проведение работ по дешифрированию экспонированного фотоматериала. Благодаря этому в 1986 г. получен первичный годовой экономический эффект 28000 рублей.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 234/244

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ СО ССЫЛКАМИ В ТЕКСТЕ

1. Айбиндер С. В. О площади контакта между трущимися телами // Изв. АН СССР. Сер. Механика и материалы. 1962. 6. С. 172–174.
2. Александров А. П., Журков С. Н. Явление хрупкого разрыва. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1933. 52 с.
3. Алексеев С. А. Изгиб толстых плит. М.: Военно-воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского, 1949. 120 с. (Труды Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского; вып. 312).
4. Амелянович К. К. Влияние длительного пребывания в натуральных морских условиях на физико-механические свойства стекла // Прочность элементов конструкций из стекла и ситалла: сб. науч. тр. / отв. ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1983. С. 23–35.
5. Амелянович К. К. Ионообменное упрочнение стеклоэлементов для повышения их работоспособности и надёжности // Прочность элементов конструкций из стекла и ситалла: сб. науч. тр. / отв. ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1983. С. 5–17.
6. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин. Киев: Наукова думка, 1982. 348 с.
7. Апенко М. И., Дубовик А. С. Прикладная оптика. М.: Наука 1982. 352 с.
8. А. с. 198123 СССР. Аппарат для глубоководного фотографирования / А. В. Майер, И. Д. Андреев, В. Е. Джус, А. В. Игнатъев, Т. А. Кунец. Оpubл. 09.06.67, Бюл. 13.
9. А. с. 311240 СССР. Герметичный корпус съёмочной камеры / А. С. Массарский. Оpubл. 09.08.1971, Бюл. 24.
10. А. с. 540105 СССР. Смотровое устройство / В. Д. Графов, В. К. Черкунов, Ф. Б. Байбаков. Оpubл. 25.12.1976, Бюл. 47.
11. А. с. 573182 СССР. Камера высокого давления для оптических исследований / Л. Ф. Верещагин, А. П. Новиков, Н. С. Фатеев. Оpubл. 25.09.1977, Бюл. 35.
12. А. с. 611073 СССР. Смотровое окно сосудов высокого давления / М. А. Яковлев. Оpubл. 15.06.1978, Бюл. 22.
13. А. с. 685548 СССР. Иллюминатор / Б. М. Олефиренко. Оpubл. 15.09.1979, Бюл. 34.
14. А. с. 689882 СССР. Присоединительная камера для испытаний иллюминаторов / А. Ф. Маурер, А. И. Никитинский, В. А. Кондратьев и др. Оpubл. 05.10.1979, Бюл. 37.
15. А. с. 927631 СССР. Иллюминатор для подводных исследовательских приборов / А. В. Зимин, С. И. Кожемякин, В. Е. Перегонцев, С. Л. Шимьянский. Оpubл. 15.05.1982, Бюл. 18.
16. А. с. 969583 СССР. Иллюминатор / Ю. В. Комягин, И. И. Дьячков. Оpubл. 30.10.1982, Бюл. 40.
17. А. с. 979199 СССР. Иллюминатор для подводного аппарата / Л. А. Свистун. Оpubл. 07.12.1982, Бюл. 45.
18. А. с. 991109 СССР. Окно криостата для оптических и спектрографических исследований / В. Д. Овсянников, С. В. Свечников. Оpubл. 23.01.1983, Бюл. 3.
19. А. с. 1034944 СССР. Иллюминатор для подводных наблюдений и съёмок / И. П. Ларин. Оpubл. 15.08.1983, Бюл. 30.
20. А. с. 1054187 СССР. Иллюминатор высокого давления / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 15.11.1983, Бюл. 42.
21. А. с. 1057364 СССР. Иллюминатор высокого давления / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский. Оpubл. 30.11.1983, Бюл. 44.
22. А. с. 1063695 СССР. Иллюминатор / В. В. Бортовой, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 30.12.1983, Бюл. 48.
23. А. с. 1068342 СССР. Иллюминатор высокого давления / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 23.01.1984, Бюл. 3.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 235/244

24. А. с. 1078393 СССР. Гидрообъектив с вынесенным входным зрачком / М. М. Русинов, И. Л. Анитропова, Р. Л. Никифорова, П. Д. Иванов. Оpubл. 07.03.1984, Бюл. 9.
25. А. с. 1082674 СССР. Иллюминатор высокого давления / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 30.03.1984, Бюл. 12.
26. А. с. 1093609 СССР. Судовое водонепроницаемое закрытие / А. С. Старев, В. Н. Тищенко. Оpubл. 23.05.1984, Бюл. 19.
27. А. с. 1098860 СССР. Судовое корпусное перекрытие с вырезом / Ю. В. Головешкин, В. И. Дорофеев, А. А. Карпов и др. Оpubл. 23.06.1984, Бюл. 23.
28. А. с. 1099517 СССР. Подводный электрический соединитель / В. Н. Филиппов, В. И. Дерябин, Г. П. Крылов, В. П. Сперанский. Оpubл. 30.06.1984, Бюл. 24.
29. А. с. 1116288 СССР. Смотровое устройство для вакуумных печей / Ю. В. Григорьев. Оpubл. 30.09.1984, Бюл. 36.
30. А. с. 1122883 СССР. Устройство для наблюдения за процессом в герметичной камере / П. В. Яшкин, Э. И. Башаратьян. Оpubл. 07.11.1984, Бюл. 41.
31. А. с. 1127854 СССР. Оптическое стекло / С. Л. Антонова, А. Г. Светлов, И. Д. Тыкачинский и др. Оpubл. 07.12.1984, Бюл. 45.
32. А. с. 1134462 СССР. Иллюминатор высокого давления / В. В. Бортовой, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон, А. А. Каминский. Оpubл. 15.01.1985, Бюл. 2.
33. А. с. 1137177 СССР. Смотровое окно / В. В. Ларионов. Оpubл. 30.01.1985, Бюл. 4.
34. А. с. 1143641 СССР. Корпус подводного гидрофизического прибора / Г. С. Писаренко, Ю. М. Родичев, Г. М. Охрименко. Оpubл. 07.03.1985, Бюл. 9.
35. А. с. 1155704 СССР. Раструб иллюминатора / В. П. Козицкий, Г. П. Шарандак, П. П. Дорохов и др. Оpubл. 15.05.1985, Бюл. 18.
36. А. с. 1191947 СССР. Многопроводный электроввод / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 15.11.1985, Бюл. 42.
37. А. с. 1202927 СССР. Стеклоочиститель судовых рубочных иллюминаторов / В. И. Макин. Оpubл. 07.01.1986, Бюл. 1.
38. А. с. 1203407 СССР. Устройство для защиты иллюминатора испытательной камеры от загрязнения / Б. В. Марасин, В. В. Рубан. Оpubл. 07.01.1986, Бюл. 1.
39. А. с. 1245842 СССР. Смотровое устройство для вакуумных установок / А. А. Ефимов, Р. А. Нугаев, Г. А. Чеботарёв и др. Оpubл. 23.07.1986, Бюл. 27.
40. А. с. 1312650 СССР. Герметичный ввод / М. А. Груздев, В. Н. Зимин, Ю. В. Карпов, Н. А. Стопцов. Оpubл. 23.05.1987, Бюл. 19.
41. Бабак Э. В., Иванов П. Д., Котлецов Б. Н., Родионов С. А. Подводная фотография. Л.: Машиностроение, 1969. 176 с.
42. Барра Ж.-Р. Основные понятия математической статистики. М.: Мир, 1974. 275 с.
43. Бартенев Г. М. Исследование закалки стекла // Журн. техн. физики. 1949. 19, вып. 12. С. 1423–1433.
44. Бартенев Г. М. Механические свойства и тепловая обработка стекла. М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. 168 с.
45. Бартенев Г. М. Строение и механические свойства неорганических стёкол. М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1966. 216 с.
46. Бегунов Б. Н., Заказнов Н. П., Кирюшин С. И., Кузичев В. И. Теория оптических систем. М.: Машиностроение, 1981. 432 с.
47. Березина Е. Е. Фотоупругие постоянные оптических стёкол // Оптико-мех. пром-сть. 1970. 2. С. 38.
48. Блох В. И. К общей теории упругих толстых плит // Инж. сб. 1954. 18. С. 61–82.
49. Блох В. И. Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1964. 484 с.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 236/244

50. Богуславский И. А. Высокопрочные закалённые стёкла. М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1969. 208 с.
51. Богуславский И. А. Об интенсификации процесса ионообменного упрочнения натрийсодержащих стёкол с помощью малых химических добавок к расплаву  $\text{KNO}_3$  // Докл. АН СССР. 1975. 225, вып. 6. С. 1373–1376.
52. Богуславский И. А., Абросимов В. А., Маркелова М. Я. Исследование процесса упрочнения натрийкальцийсиликатного стекла при низкотемпературном ионном обмене // Стекло и керамика. 1968. 2. С. 1–5.
53. Бондарев К. Т. Прочность закалённого стекла «сталинит» // Стекло и керамика. 1983. 7. С. 28–30.
54. Ботвинкин О. К., Денисенко О. Н. Ионный обмен и повышение прочности стекла // Докл. АН СССР. Серия «Неорганические материалы». 1966. 2, вып. 11. С. 2029–2032.
55. Браиловский В. Б., Железцов В. А., Бобылева А. В. Прочность стекла после низкотемпературного ионного обмена // Стекло и керамика. 1967. 4. С. 10–12.
56. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Расчёт пластин. Киев: Будивэльнык, 1970. 436 с.
57. Ванин В. И. Отжиг и закалка листового стекла. М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1965. 116 с.
58. Вольмир А. С., Кильдибеков И. Г. Круглые пластинки при осесимметричной деформации // Прочность, устойчивость, колебания: Справ. / под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. С. 563–573.
59. Галёркин Б. Г. Напряжённое состояние при изгибе прямоугольной плиты по теории толстых плит и теории плит тонких // Труды Ленинградского института сооружений. 1935. 2. С. 22–32.
60. Галёркин Б. Г. Общее решение задачи о напряжениях и деформациях в толстой круглой плите и плите в виде круглого сектора // Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1. С. 335–341.
61. Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние дисков иллюминаторов из неорганического стекла // Повышение эффективности и надёжности машин и аппаратов в основной химии: Всесоюз. совещ. Сумы, 1986. С. 52–53.
62. Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние и оптические свойства дискового иллюминатора // Средства изучения и освоения океана: 5 Всесоюзная конференция. Л., 1985. 1. С. 27.
63. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А. Влияние глубины погружения на аберрации глубоководных оптических систем // Теоретическая и прикладная оптика: Всесоюзная конференция. Л., 1984. С. 278.
64. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А., Каринцев И. Б. К оптимизации смотровых окон для высокого давления // Четвёртая Всесоюзная конференция по оптимальному управлению в механических системах. М., 1982. С. 54.
65. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А., Каринцев И. Б. К прочностной оптимизации глубоководных иллюминаторов // Проблемы оптимизации в машиностроении: Семинар-совещание. Харьков, 1982. Ч. 1. С. 113.
66. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А., Каринцев И. Б. О напряжённо-деформированном состоянии конических и сферических иллюминаторов при высоком давлении // Пути совершенствования, интенсификации и повышения надёжности аппаратов в основной химии: Второе Всесоюз. науч.-техн. совещ. Сумы, 1982. С. 72–75.
67. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А., Каринцев И. Б. О прочностной оптимизации плоскопараллельных глубоководных иллюминаторов // Динамика и прочность машин. 1985. 41. С. 108–114.
68. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А., Каринцев И. Б. Об уплотнении иллюминаторов высокого давления // Третье Всесоюз. науч.-техн. совещ. по уплотнительной технике. Сумы, 1982. С. 200–201.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 237/244

69. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
70. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
71. Гольдман А. Я. Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение, 1979. 320 с.
72. ГОСТ 13659-72. Стекло оптическое бесцветное. Физико-химические характеристики. Основные параметры. Взамен ГОСТ 13659-68; Введ. 01.01.80 до 01.01.90.
73. ГОСТ 17622-72 Е. Стекло органическое техническое. Технические условия. Введ. 01.07.73 до 01.01.87.
74. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жёстко защемлённой плиты // Прикладная механика. 1963. 25, вып. 5. С. 6–9.
75. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Смешанная осесимметричная задача теории упругости для цилиндра конечной длины // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1971. 15. С. 3–8.
76. Гужавин О. Б., Дубровский В. А. Исследование процесса травления стекла в кислотных ваннах // Стекло. 1985. 1. С. 27–37.
77. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1970. 432 с.
78. Гутман С. Г. Расчёт толстых упругих плит под действием собственного веса // Известия Ленинградского НИИ гидротехники. 1941. 29. С. 153–158.
79. Гутман С. Г. Расчёт толстых упругих плит под непрерывно распределённым давлением // Известия Ленинградского НИИ гидротехники. 1940. 28. С. 212–238.
80. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.
81. Диомидов М. Н., Дмитриев А. Н. Покорение глубин. Л.: Судостроение, 1974. 326 с.
82. Дмитриев А. Н., Диомидов М. Н. Разведчики морских глубин. Л.: Судостроение, 1968. 216 с.
83. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
84. Дьюкс У. Х., Энтони Ф. М. Проектирование узлов и соединений из хрупких материалов // Разрушение / под ред. Г. Либовица. М.: Машиностроение, 1977. Т. 4. С. 241–298.
85. Дьячков И. И., Комягин Ю. В. Конструктивная прочность оптического иллюминатора // Оптико-мех. пром-сть. 1985. 10. С. 58–60.
86. Жемочкин Б. Н. Расчёт круглых плит на упругом основании на симметричную нагрузку. М.: Изд-во Военно-инж. акад. РККА им. В. В. Куйбышева, 1938. 136 с.
87. Золотарёв В. М., Морозов В. Н., Смирнова Е. В. Оптические постоянные природных и технических сред: Справ. Л.: Химия, 1984. 216 с.
88. Исследование прочности оргстекла в условиях сложного напряжённого состояния / О. Е. Ольховик, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон и др. // Проблемы прочности. 1983. 8. С. 77–79.
89. К вопросу о повышении прочности стекла / Ф. Ф. Витман, С. Н. Журков, Б. Я. Левин, В. П. Пух // Некоторые проблемы прочности твёрдого тела. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 340–347.
90. Кауш Г. Разрушение полимеров. М.: Мир, 1981. 440 с.
91. Квитка А. Л., Дьячков И. И. Напряжённое состояние и прочность оболочек из хрупких неметаллических материалов. Киев: Наукова думка, 1983. 284 с.
92. Китайгородский И. И., Сильвестрович С. И., Фирсов В. М. Эффект упрочнения стекла при его закалке в расплавленном металле // Докл. АН СССР. 1964. 158, вып. 3. С. 582–585.
93. Клёнов В. Ф., Пищик Г. Ф., Косулина Т. Г. Приближённый расчёт оптических иллюминаторов // Тр. науч.-техн. конф. по машиностр. и приборостр. Новгород, 1973. С. 57–59.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 238/244

94. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 528 с.
95. Колтунов М. А., Майборода В. П., Зубчанинов В. Г. Прочностные расчёты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 240 с.
96. Конструкционная прочность стёкол и ситаллов / Г. С. Писаренко, К. К. Амелянович, Ю. И. Козуб и др. Киев: Наукова думка, 1979. 284 с.
97. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчётов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
98. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
99. Красовская И. М., Куликова Е. Н., Рябов В. А. О влиянии состава ванн плавиковой кислоты на упрочнение силикатных стёкол // Стекло и керамика. 1963. 4. С. 13–15.
100. Круг Е. М. Об одном символическом решении уравнений теории упругости // Научный ежегодник Черновицкого государственного университета. 1960. С. 537–543.
101. Латыев С. М. Компенсация погрешностей в оптических приборах. Л.: Машиностроение, 1985. 248 с.
102. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твёрдом теле // Прикладная механика. 1959. 5, вып. 4. С. 391–401.
103. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикладная механика и математика. 1942. 6, вып. 2/3. С. 151–168.
104. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 492 с.
105. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое издательство Народного комиссариата тяжёлой промышленности СССР, 1935. 674 с.
106. Лянзберг В. П., Шалашилин В. И. Конические акриловые иллюминаторы при кратковременном нагружении // Проблемы прочности. 1983. 11. С. 105–109.
107. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряжённом состоянии: Справ. / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, Ф. Ф. Гигиняк, В. П. Ламашевский. Киев: Наукова думка, 1983. 368 с.
108. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.
109. Неделчев Н. И. Сравнение расчётных и экспериментальных раскрытий профиля поверхностной трещины нормального отрыва // Проблемы прочности. 1985. 12. С. 46–52.
110. Несущие и светопрозрачные элементы конструкций из стекла / Г. С. Писаренко, К. К. Амелянович, И. Б. Каринцев; под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1987. 200 с. / Глава IV. Лев Г. Гелимсон. Напряжённо-деформированное состояние и оптические свойства смотровых окон. С. 132–191.
111. Николаев А. Ф. Синтетические полимеры и пластические массы на их основе. М.; Л.: Химия, 1964. 784 с.
112. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Государственное издательство литературы по судостроению, 1962. 432 с.
113. Нотт Дж. Ф. Основы механики разрушения. М.: Металлургия, 1978. 256 с.
114. О проектировании глубоководных иллюминаторов / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, В. В. Охрименко // Проблемы научных исследований в области изучения и освоения Мирового океана: Четвёртая Всесоюзная конференция: Методы расчёта и проблемы прочности конструкций из современных материалов. Владивосток, 1983. С. 103–104.
115. О связи прочности стекла с числом трещин при разрушении / А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, О. К. Морачковский // Проблемы прочности. 1985. 12. С. 44–45.
116. Об уплотнении иллюминаторов высокого давления / Лев Г. Гелимсон, А. А. Каминский, В. Н. Покотило и др. // Четвёртое Всесоюзное науч.-техн. совещ. по уплотнительной технике. Сумы, 1985. С. 25–26.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 239/244

117. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 696 с.
119. Охрименко Г. М. Влияние наружных рёбер жёсткости и внешней среды на несущую способность оболочек // Прочность элементов конструкций из стекла и ситалла: сб. науч. тр. / отв. ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1983. С. 178–196.
119. Охрименко Г. М., Пух В. П. Влияние упрочнения глубоким травлением в плавиковой кислоте на прочность при осевом сжатии технического стекла // Проблемы прочности. 1982. 2. С. 107–111.
120. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1968. 246 с.
121. Пикар О. На глубину морей в батискафе. Л.: Государственное издательство литературы по судостроению, 1961. 260 с.
122. Пикар Ж., Диту Р. Глубина – семь миль. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 200 с.
123. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённом состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. 416 с.
124. Пищик Г. Ф. Напряжения и деформации в деталях оптических приборов. Л.: Машиностроение, 1968. 248 с.
125. Пищик Г. Ф., Прокофьев Е. Н., Клёнов В. Ф. Исследование объёмного напряжённого состояния клеенных объектов // Прикладная механика: Тр. науч.-техн. конф. Новгород, 1971. Ч. 1. С. 36.
126. Потехин О. С. Глубоководные исследования за рубежом. Л.: Судостроение, 1971. 282 с.
127. Прокопов В. К. Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой // Прикладная механика и математика. 1950. 14, вып. 5. С. 527–536.
128. Прокофьев Е. Н., Пищик Г. Ф., Чередник В. С., Куршев Г. А. Методы соединения оптических деталей. Киев: Техника, 1984. 128 с.
129. Прочность дисковых иллюминаторов из оптического стекла / А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, В. В. Бортовой // Проблемы научных исследований в области изучения и освоения Мирового океана: Методы расчёта и проблемы прочности конструкций из соврем. материалов: Четвёртая Всесоюзная конференция. Владивосток, 1983. С. 105.
130. Прочность дисковых иллюминаторов из оптического стекла / А. А. Каминский, А. В. Ридченко, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон // Динамика и прочность машин. 1985. Вып. 42. С. 47–50.
131. Прочность листового полированного стекла в состоянии промышленной поставки и после упрочнения по методу ионного обмена / К. К. Амелянович, Е. Т. Горалик, А. П. Полешко, О. В. Щеглова // Проблемы прочности. 1978. 1. С. 104–107.
132. Прочность стекла: сборник статей / под ред. В. А. Степанова. М.: Мир, 1969. 340 с.
133. Прочность элементов конструкций из стекла и ситалла: сб. науч. тр. / отв. ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1983. 220 с.
134. Пух В. П. Прочность и разрушение стекла. Л.: Наука, 1973. 156 с.
135. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высшая школа, 1966. 228 с.
136. Родичев Ю. М. Прочность травленого стекла при действии факторов морской среды // Прочность элементов конструкций из стекла и ситалла: сб. науч. тр. / отв. ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1983. С. 35–45.
137. Русинов М. М. Несферические поверхности в оптике. М.: Недра, 1965. 196 с.
138. Русинов М. М. Техническая оптика. Л.: Машиностроение, 1979. 488 с.
139. Русинов М. М. Юстировка оптических приборов. М.: Недра, 1969. 238 с.
140. Рябов В. А., Куликова Е. Н., Красовская И. М. О влиянии состава и состояния кислотных ванн на упрочнение стекла // Стекло. 1962. 4. С. 5–8.
141. Свешников А. А. Основы теории ошибок. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972. 122 с.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 240/244

142. Системы и элементы глубоководной техники подводных исследований / под общ. ред. В. С. Ястребова. Л.: Судостроение, 1981. 304 с.
143. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 668 с.
144. Современные глубоководные аппараты / под общ. ред. А. К. Сборовского, А. В. Кирсанова. М.: Изд-во ЦНИИТЭИС, 1967. 256 с.
145. Создание оптического иллюминатора. Сообщ. 1. Напряжённо-деформированное состояние плоского стеклоэлемента / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, В. С. Морганюк // Проблемы прочности. 1986. 9. С. 114–119.
146. Создание оптического иллюминатора. Сообщ. 2. Напряжённо-деформированное состояние дискового стеклоэлемента в сборном узле / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, Ю. Б. Гнучий // Проблемы прочности. 1986. 9. С. 119–123.
147. Создание оптического иллюминатора. Сообщ. 3. Напряжённо-деформированное состояние и прочность плоского стеклоэлемента / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, Ю. Б. Гнучий // Проблемы прочности. 1986. 11. С. 97–101.
148. Создание работоспособного оптического иллюминатора. Сообщ. 1 / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, В. С. Морганюк // Проблемы прочности. 1985. 11. С. 104–109.
149. Создание работоспособного оптического иллюминатора. Сообщ. 2 / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, Ю. Б. Гнучий // Проблемы прочности. 1985. 12. С. 90–94.
150. Солнцев С. С., Морозов Е. М. Разрушение стекла. М.: Машиностроение, 1978. 152 с.
151. Сопrotивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка, В. Г. Попков, Э. С. Уманский; под ред. акад. АН УССР Г. С. Писаренко. 5-е изд., перераб. и доп. Киев: Выща школа, 1986. 775 с.
152. Справочник по пластическим массам / под ред. В. М. Катаева и др. М.: Химия, 1975. Т. 1. 440 с.
153. Стекло: Справочник / под ред. д-ра техн. наук, проф. Н. М. Павлушкина; Моск. хим.-технол. ин-т им. Д. И. Менделеева. М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1973. 487 с.
154. Стопцов Н. А., Груздев И. А. Средства подводного освещения. Л.: Судостроение, 1985. 200 с.
155. Стэчив Дж. Д. Иллюминаторы со сферическими окнами из стекла или прозрачной керамики для глубоководных аппаратов // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1975. 3. С. 210–220.
156. Стэчив Дж. Д. Конические акриловые иллюминаторы под длительным давлением 350 атм // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1972. 3. С. 78–83.
157. Стэчив Дж. Д. Конические акриловые иллюминаторы при длительном воздействии гидростатического давления 700 кгс/см<sup>2</sup> // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1972. 4. С. 92–98.
158. Стэчив Дж. Д. Конические акриловые иллюминаторы при длительном воздействии гидростатического давления 1400 кгс/см<sup>2</sup> // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1972. 1. С. 321–329.
159. Стэчив Дж. Д. Критическое давление для сферических акриловых иллюминаторов при кратковременном гидростатическом нагружении // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1969. 3. С. 46–58.
160. Стэчив Дж. Д. Полусферические оболочки из акриловой пластмассы с фланцами для подводных систем. Часть 2. Прочность при статическом и циклическом нагружении гидростатическим давлением // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1978. 2. С. 292–306.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённно-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 241/244

161. Стэчив Дж. Д. Сферические иллюминаторы для подводных аппаратов // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1979. 3. С. 210–220.
162. Стэчив Дж. Д., Слеттен Р. Рассчитанные на рабочую глубину 3600 м акриловые стёкла иллюминаторов в форме секторов сферической оболочки, предназначенные для глубоководного аппарата // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1976. 2. С. 144–161.
163. Теоретическое и экспериментальное исследование напряжённно-деформированного состояния и оптимизация элементов конструкций с учётом особенностей формы, нагружения и структуры материала: Отчёт о НИР (заключ.) / Ин-т пробл. машиностр. (ИПМаш) АН УССР; Руководитель А. Н. Подгорный. № ГР 76079000; Инв. № Б 713466. Харьков, 1978. 222 с.
164. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 508 с.
165. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
166. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
167. Упрочнение оптического стекла метолом низкотемпературного ионного обмена / А. М. Бутаев, Р. П. Келина, О. П. Виноградова и др. // Оптико-мех. пром-сть. 1982. 3. С. 38–40.
168. Филлипс К. Дж. Разрушение стекла // Разрушение / под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1976. Т. 1. Ч. 1. С. 19–58.
169. Флетчер П., Тиллман Д. Влияние закалки в кремнийорганической жидкости и кислотного полирования на прочность стекла // Прочность стекла: сборник статей / под ред. В. А. Степанова. М.: Мир, 1969. С. 207–215.
170. Францевич И. Н., Воронов Ф. Ф., Бакута С. А. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов: Справ. Киев: Наукова думка, 1982. 284 с.
171. Фридман Я. Б. Механические свойства металлов. М.: Машиностроение, 1974. Т. 1–2.
172. Цвик Л. Б. О невязках сопряжения перемещений и напряжений в задачах о сопряжении и контакте упругих тел // Докл. АН СССР. 1983. 268. 3. С. 570–574.
173. Циклис Д. С. Техника физико-химических исследований при высоких и сверхвысоких давлениях. М.: Химия, 1976. 432 с.
174. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
175. Чижевский К. Г. Расчёт круглых и кольцевых пластин. Л.: Машиностроение, 1977. 182 с.
176. Шенк Г., Кендалл Г. Подводная съёмка. М.: Искусство, 1960. 192 с.
177. Шульман М. Я. Измерение передаточных функций оптических систем. Л.: Машиностроение, 1980. 208 с.
178. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: Справ. пособие / отв. ред. Б. С. Касаткин. Киев: Наукова думка, 1981. 584 с.
179. Beton-Kalender: Taschenbuch für den Beton- und Stahlbetonbau. Berlin: Ernst und Sohn, 1944. 137 S.
180. Boutan L. L'Instantane dans la photographie sous-marine // Arch. Zool. Exper. Gen. 1898. 26. P. 299–330.
181. Boutan L. Memoire sur la photographie sous-marine // Arch. Zool. Exper. Gen. 1893. 21. P. 281–324.
182. Clemmow C. A., Love Augustus Edward Hough. The flexure of thick circular plates // Proceedings of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering sciences. London, 1926. 112. P. 559–598.
183. Deep-Sea Photography / Ed. by J. B. Hersey. Baltimore: Jones Hopkins Press, 1967. 310 pp.
184. Garabedian C. A. Circular plates of constant or variable thickness // Transactions of the American Mathematical Society. 1923. 25, No. 3. P. 343–398.
185. Pat. 1192944 BRD. Wasserdichtes Bullauge, insbesondere für Unterwassergeräte / J. G. M. J. de Wouters d'Oplinter. Publ. 13.01.66.
186. Pat. 2357093 BRD. Unterwasserkamera / A. Pocachard. Publ. 12.05.77.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 242/244

187. Pat. 2531938 BRD. Unterwasserkamera für den Tiefseeinsatz / H. Winnacker. Publ. 20.07.78.  
188. Pat. 2650524 BRD. Unterwasserkamera / H. Winnacker, J. Dierssen. Publ. 07.09.78.  
189. Pat. 2656516 BRD. Druckfestes, im wesentlichen zylindrisches Unterwasserkameragehäuse für die Tiefsee / H. Winnacker. Publ. 10.05.79.  
190. Pat. 2106255 République Française. Hublot pour appareils de plongée et chambres pressurisées / A. G. Dragerwerk. Publ. 28.04.72.  
191. Pat. 2177857 République Française. Dispositif d'observation dans des compartiments dont les parois intérieures ou extérieures sont soumises a des pressions élevées / Fried. Krupp Gesellschaft mit Beschränkter Haftung. Publ. 09.11.73.  
192. Pat. 2318436 République Française. Chambre de prises de vues sous-marines munie d'un dispositif de lampe flash / H. Winnacker. Publ. 11.02.77.  
193. Pat. 2370299 République Française. Appareil de prises de vues sous-marines / H. Winnacker, J. Dierssen. Publ. 02.06.78.  
194. Pat. 2374660 République Française. Appareil de prise de vues sous-marines pour grandes profondeurs / H. Winnacker. Publ. 13.07.78.  
195. Pat. 947918 GB. An improved method of and apparatus for carrying out under-water exploration / D. I. Rebikoff. Publ. 29.01.64.  
196. Pat. 3899790 USA. Apparatus for taking underwater pictures / A. Pocachard. Publ. 12.08.75.  
197. Pat. 4153357 USA. Underwater camera / H. Winnacker, J. Dierssen. Publ. 08.09.79.  
198. Pat. 4184758 USA. Deep-sea underwater camera / H. Winnacker. Publ. 22.01.80.  
199. Pat. 4295721 USA. High pressure and high speed optical enclosure system / D. Rebikoff. Publ. 20.10.81.  
200. Sibert H. W. Moderately thick circular plates with plane faces // Transactions of the American Mathematical Society. 1931. 33, No. 2. P. 329–369.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе Ленинградского института точной механики и оптики

докт. техн. наук, профессор

О. Ф. Немолочнов

23.10.1986

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина

канд. техн. наук, доцент

И. А. Ковалёв

16.10.1986

### АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов исследований напряжённо-деформированного состояния  
глубоководных иллюминаторов

В соответствии с договором о творческом научном содружестве № 83-98 от 1 января 1984 г. между Ленинградским институтом точной механики и оптики и Сумским филиалом Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина по теме «Исследование свойств иллюминаторов для применения в глубоководных аппаратах» Сумским филиалом Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина выполнен комплекс теоретических и экспериментальных исследований напряжённо-деформированного состояния светопрозрачных элементов. Разработанные на этой основе методики расчёта и рекомендации по проектированию и расчёту глубоководных иллюминаторов переданы в

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.

Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 243/244

отраслевую лабораторию кафедры теории оптических приборов Ленинградского института точной механики и оптики и использованы ею при создании новых глубоководных оптических систем.

Использование полученных результатов позволило усовершенствовать проектирование и расчёт глубоководных оптических систем, повысить качество создаваемых глубоководных оптических систем, повысить качество изображения глубоководных объектов.

Заведующий кафедрой теории оптических приборов,  
докт. техн. наук, профессор, лауреат Ленинской и Государственных премий  
М. М. Русинов

Докт. техн. наук, профессор, лауреат Государственных премий П. Д. Иванов  
Заведующий кафедрой сопротивления материалов, канд. техн. наук, доцент И. Б. Каринцев  
Старший научный сотрудник Лев Г. Гелимсон

Министерство геологии СССР

«УТВЕРЖДАЮ»

Зам. директора НИПИОкеангеофизика

А. С. Щербаков

13 января 1987 г.

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

в НИПИОкеангеофизика ПО «Южморгеология»

результатов диссертационной работы

Гелимсона Льва Г.

12 января 1987 г.

г. Геленджик

В соответствии с договором по теме 06.05.03.81-85 «Экспериментально-теоретические исследования, разработка и изготовление глубоководных боксов и стендов высокого давления для оптико-механических испытаний» Гелимсоном Л. Г. выполнены исследования напряжённо-деформированного состояния стеклоэлементов и его влияния на оптические свойства глубоководных иллюминаторов.

Разработанные на этой основе метод проектирования иллюминаторов с учётом жёсткости и прочности стеклоэлементов, рекомендации по проектированию и новые конструкции иллюминаторов переданы в отдел фототелевизионных систем НИПИОкеангеофизика ПО «Южморгеология» и использованы в комплексе «МИР» при глубоководных съёмках.

Использование полученных результатов позволило повысить качество изображения глубоководных объектов, увеличить достоверность получаемой информации и сократить время на проведение работ по дешифрированию экспонированного фотоматериала.

Благодаря этому в 1986 г. получен первичный годовой экономический эффект 28 (двадцать восемь) тысяч рублей. По служебным соображениям расчёт экономического эффекта не передаётся.

Доля автора в экономическом эффекте от внедрения диссертационной работы составляет 90 %, то есть 25200 (двадцать пять тысяч двести) рублей.

Заведующий отделом фототелевизионных систем

канд. техн. наук

А. М. Игнатов

Старший экономист

А. П. Химченко

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06.  
 Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1986, 1987. 244/244

CONTRIBUTOR'S PROFILE & ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| Name                             | Gelimson Lev Grigorevic,<br>literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn  |
| Ф.И.О. (полностью)               | Гелимсон Лев Григорьевич,<br>литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон   |
| Degree<br>Current position       | Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering<br>in the section "Physical and Mathematical Sciences"<br>by the Highest Attestation Commission Classifier<br>Director<br>Director, Producer, Literary and Artistic Manager |
| Учёная степень<br>Должность      | доктор технических наук<br>в разделе «Физико-математические науки»<br>по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии<br>директор<br>директор, продюсер и литературно-художественный руководитель          |
| Institutional<br>affiliation     | Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany<br>Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany   |
| Место работы                     | Академический институт создания всеобщих наук, Многоязычный<br>литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия  |
| e-mail, эл. почта                | Leohi@mail.ru   |
| Postal address<br>Почтовый адрес | Ph. D. & Dr. Sc. Lev Gelimson, Westendstrasse 68, D-80339 Munich,<br>Germany  |
| Science Index (SPIN)             | 8046-6818   |
| Scopus ID                        | 6505889792  |
| Researcher ID                    | R-5007-2016   |
| ORCID ID                         | 0000-0003-0627-84   |